

**Examen final session 2 (1 h)**  
**Mercredi 19 juin 2019**

**NOM :**  
**PRÉNOM :**  
**CHARGÉ DE COURS :**

**Préambule :**

Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM** ainsi que le **NOM DE VOTRE CHARGÉ DE COURS** (M. Ressayre, M. Pujo-Menjouet ou M. Wagner).

**TOUTE INFORMATION MANQUANTE SERA SANCTIONNÉE PAR 1 POINT EN MOINS.**

Documents et calculatrices ne sont PAS autorisés durant l'épreuve.

L'usage des téléphones est prohibé.

La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 2 exercices. Noter que toutes les questions de chaque exercice peuvent se traiter sans avoir répondu aux précédentes.

**Attention :** pour l'exercice 1, rédiger directement la réponse sur la feuille, les calculs justificatifs seront **obligatoirement** à préciser sur la copie.

**Exercice 1- 7 points - 20 minutes**

1. (a) Déterminer le  $\text{pgcd}(189; 255)$ .

**Réponse :**

- (b) Donner toutes les solutions de l'équation  $189x + 255y = 3$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

**Réponse :**

2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation suivante :  $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$ .

**Réponse :**

## Exercice 2 - (13 points) - 40 minutes

1. On considère l'application  $g$  définie pour tout  $x \in \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$  par

$$g(x) = e^x(x - 1) + x^2.$$

- (a) Calculer la dérivée  $g'$  de  $g$  sur  $\mathcal{D}_g$ .
- (b) Déterminer les limites de  $g$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- (c) Étudier le signe de  $g'(x)$  sur  $\mathcal{D}_g$  et dresser le tableau de variations de  $g$  sur  $\mathcal{D}_g$ .
- (d) Montrer que l'équation  $g'(x) = 0$  admet  $a$  comme unique solution sur  $[0, +\infty[$ .
- (e) Montrer que  $a$  se situe dans l'intervalle  $I = [1/2; 1]$ .

2. On considère maintenant l'application  $f$  définie pour tout  $x \in \mathcal{D}_f = [0, +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}.$$

- (a) Montrer que les équations  $f(x) = x$  et  $g(x) = 0$  sont équivalentes sur  $[0, +\infty[$ .
- (b) En déduire que l'équation  $f(x) = x$  admet  $a$  comme unique solution sur  $[0, +\infty[$ .
- (c) Calculer  $f'$  sur  $\mathcal{D}_f$  et en déduire le sens de variation de  $f$ . Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Dresser le tableau de variations de  $f$ .

3. On considère désormais la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$\begin{cases} u_1 &= 1/2, \\ u_{n+1} &= f(u_{n-1}), \text{ pour tout } n \geq 2. \end{cases}$$

- (a) Montrer que  $f(x) \in I = [1/2; 1]$  pour tout  $x \in I$ .
- (b) En déduire que  $u_n \in I$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- (c) Montrer que  $|f'(x)| \leq 1/2$  pour tout  $x \in I$ .
- (d) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$|u_n - a| \leq \frac{|u_{n-1} - a|}{2}, \text{ pour tout } n \geq 2.$$

- (e) En déduire, par un raisonnement par récurrence que  $|u_n - a| \leq (1/2)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- (f) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $a$ .