Université Claude-Bernard Lyon 1 — UE Fondamentaux des Mathématiques I
Semestre d'automne 2018–2019

Examen final session 2 (1 h)

Mercredi 19 juin 2019

NOM :
PRÉNOM :
CHARGÉ DE COURS :

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM** ainsi que le **NOM DE VOTRE CHARGÉ DE COURS** (M. Ressayre, M. Pujo-Menjouet ou M. Wagner).
TOUTE INFORMATION MANQUANTE SERA SANCTIONNÉE PAR 1 POINT EN MOINS.
Documents et calculatrices ne sont PAS autorisés durant l'épreuve.
L'usage des téléphones est prohibé.
La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte 2 exercices. Noter que toutes les questions de chaque exercice peuvent se traiter sans avoir répondu aux précédentes.
Attention : pour l'exercice 1, rédiger directement la réponse sur la feuille, les calculs justificatifs seront **obligatoirement** à préciser sur la copie.

Exercice 1- 7 points - 20 minutes

1. (a) Déterminer le $\text{pgcd}(189; 255)$.

   Réponse :

   (b) Donner toutes les solutions de l'équation $189x + 255y = 3$, où x et y sont des entiers relatifs.

   Réponse :

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$.

   Réponse :

Exercice 2 - (13 points) - 40 minutes

1. On considère l'application g définie pour tout $x \in \mathscr{D}_g = \mathbb{R}$ par
$$g(x) = e^x(x-1) + x^2.$$
   (a) Calculer la dérivée g' de g sur $\mathscr{D}_g$.
   (b) Déterminer les limites de g quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
   (c) Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathscr{D}_g$ et dresser le tableau de variations de g sur $\mathscr{D}_g$.
   (d) Montrer que l'équation l'équation $g'(x) = 0$ admet a comme unique solution sur $[0, +\infty[$.
   (e) Montrer que a se situe dans l'intervalle $I = [1/2; 1]$.

2. On considère maintenant l'application f définie pour tout $x \in \mathscr{D}_f = [0, +\infty[$ par
$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}.$$
   (a) Montrer que les équations $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes sur $[0, +\infty[$.
   (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet a comme unique solution sur $[0, +\infty[$.
   (c) Calculer f' sur $\mathscr{D}_f$ et en déduire le sens de variation de f. Calculer la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variations de f.

3. On considère désormais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$\begin{cases} u_1 & = & 1/2, \\ u_{n+1} & = & f(u_{n-1}), \text{ pour tout } n \geq 2. \end{cases}$$
   (a) Montrer que $f(x) \in I = [1/2; 1]$ pour tout $x \in I$.
   (b) En déduire que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Montrer que $|f'(x)| \leq 1/2$ pour tout $x \in I$.
   (d) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que
$$|u_n - a| \leq \frac{|u_{n-1} - a|}{2}, \text{ pour tout } n \geq 2.$$
   (e) En déduire, par un raisonnement par récurrence que $|u_n - a| \leq (1/2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (f) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers a.