Université Claude Bernard, Lyon 1 Licence Sciences et Technologies

Fondamentaux des mathématiques 1

Examen session 2 (2 heures)

22 juin 2017

Exercice 1.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Ecrire à l'aide de quantificateurs la propriété « f est strictement croissante »
2. Ecrire à l'aide de quantificateurs la propriété « f n'est pas strictement croissante »

Correction exercice 1.

1.
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$
2. C'est la négation du 1.
$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y \quad \text{et} \quad f(x) \geq f(y)$$

Exercice 2.

Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \mapsto 2n$$
$$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Calculer $f(0), f(4), g(0), g(1), g(2)$ et $g(3)$.
2. Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.
3. Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.
4. Pour chacune des applications $g \circ f$ et $f \circ g$, dire si elle est injective, surjective, bijective.

Correction exercice 2.

1.
$$f(0) = 2 \times 0 = 0$$
$$f(4) = 2 \times 4 = 8$$
$$0 = 2 \times 0 \Rightarrow g(0) = \frac{0}{2} = 0$$
$$2 = 2 \times 1 \Rightarrow g(2) = \frac{2}{2} = 1$$
$$3 = 2 \times 1 + 1 \Rightarrow g(3) = \frac{3-1}{2} = 1$$
2.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, f(n) = f(m) \Rightarrow 2n = 2m \Rightarrow n = m$$
Donc f est injective.
Existe-t-il $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 = f(n)$, autrement dit tel que $1 = 2n$, la réponse est non, donc 1 n'a pas d'antécédent et f n'est pas surjective.
D'après la question 1., $g(2) = g(3)$ et bien sûr $2 \neq 3$ donc g n'est pas injective.
Soit $m \in \mathbb{N}$, existe-t-il $n \in \mathbb{N}$ tel que $m = g(n)$? il suffit de voir que $n = 2m$ convient donc g est surjective. Remarque : ce n'est pas le seul car $n = 2m + 1$ convient aussi.
3.

$$\forall n\in\mathbb{N}, g\circ f(n)=g\big(f(n)\big)=g(2n)=\frac{2n}{2}=n=Id(n)$$

Donc $g\circ f=Id$

$$\forall p\in\mathbb{N}, f\circ g(2p)=f\big(g(2p)\big)=f\left(\frac{2p}{2}\right)=f(p)=2p$$

Et

$$\forall p\in\mathbb{N}, f\circ g(2p+1)=f\big(g(2p+1)\big)=f\left(\frac{2p+1-1}{2}\right)=f(p)=2p=(2p+1)-1$$

Autrement dit

$$f\circ g(n)=\begin{cases} n & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si} \quad n \text{ est impair}\end{cases}$$

4. $g\circ f=Id$ donc $g\circ f$ est injectif, surjectif et bijectif.

$$f\circ g(0)=f\circ g(1)=0$$

Donc $f\circ g$ n'est pas injectif.

Existe-t-il $n\in\mathbb{N}$ tel que $1=f\circ g(n)$, autrement dit tel que $1=f\big(g(n)\big)=2g(n)$, la réponse est non, donc 1 n'a pas d'antécédent et $f\circ g$ n'est pas surjective.

$f\circ g$ n'est pas injective donc pas bijective. Autre solution $f\circ g$ n'est pas surjective donc pas bijective.

Exercice 3.

Soit $f\colon [0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0)=0$. On suppose que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et dérivable à droite en 0 avec $f'(0)=0$. On désigne par g l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & \text{si} \quad x>0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

1.
   a. Justifier que g est continue sur $]0,+\infty[$.
   b. En observant que pour tout $x>0$

   $$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

   Déterminer

   $$\lim_{x\to 0^+} g(x)$$

   c. En déduire que g est continue sur $[0,+\infty[$.
2. Expliquer pourquoi g est dérivable sur $]0,+\infty[$. Montrer ensuite que :

$$\forall x\in\,]0,+\infty[, g'(x)=\frac{f'(x)}{x}-\frac{f(x)}{x^2}$$

3. On suppose désormais que f' est croissante sur $]0,+\infty[$.
   a. Rappelez le théorème des accroissements finis.
   b. Appliquer ce théorème à f sur l'intervalle $]0,x[$, où $x>0$ est donné.
   c. Montrer qu'il existe $c\in\,]0,x[$ tel que :

   $$g'(x)=\frac{f'(x)-f'(c)}{x}$$

   d. Que peut-on en déduire pour la croissance de g sur $[0,+\infty[$?

Correction exercice 3.

1.
   a. g est le quotient de deux fonctions continues sur $]0,+\infty[$ donc g est continue sur $]0,+\infty[$.
   b.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0=g(0)$$

Car f est dérivable à droite en 0. Par conséquent g est continue en 0 puisque

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$$

c. g est continue sur $]0,+\infty[$ d'après 1. et continue en 0 d'après 2. donc g est continue sur $[0,+\infty[$.

2. g est dérivable sur $]0,+\infty[$ car g est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.

$$\forall x \in]0,+\infty[, g'(x) = \frac{f'(x)\times x - f(x)\times 1}{x^2} = \frac{xf'(x)}{x^2} - \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}$$

3.

a. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f'(a) = (b-a)f'(c)$$

b. D'après a. il existe $c \in]0,x[$ tel que : $f(x) - f'(0) = xf'(c)$

Ce qui équivaut à $f(x) = xf'(c)$

c. D'après 2. et 3.c.

$$\forall x \in]0,+\infty[, g'(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{xf'(c)}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f'(c)}{x} = \frac{f'(x)-f'(c)}{x}$$

d. Comme $c < x$ et que f' est croissante on a $f'(c) \le f'(x)$, donc $f'(x) - f'(c) \ge 0$

Ce qui montre que

$$\forall x \in]0,+\infty[, g'(x) \ge 0$$

Autrement dit g est croissante.

Exercice 4.

On considère des réels a, c et p tels que : $a,c,p \in]0,1[$ et $a^2 + c^2 = 1$. On s'intéresse dans cet exercice aux solutions de l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$:

$$(a^2 - x)(1-x) + pc^2 = 0$$

1. Montrer que le discriminant de cette équation est $\Delta = c^2(c^2 - 4p)$.
2. Dans le cas $\Delta > 0$, montrer que les deux solutions réelles λ_1 et λ_2 vérifient $|\lambda_i| < 1$ pour $i \in \{1,2\}$.
3. Dans le cas $\Delta = 0$, montrer que la solution réelle λ vérifie $|\lambda| < 1$.
4. Lorsque $\Delta < 0$ on note z et $\overline{z}$ les deux solutions complexes conjuguées de l'équation, avec $z \in \mathbb{C}$.
   a. Montrer que $z\overline{z} = a^2 + pc^2$.
   b. En déduire que $|z| < 1$.

Correction exercice 4.

1.

$$(a^2 - x)(1-x) + pc^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 - a^2x - x + x^2 + pc^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (a^2+1)x + a^2 + pc^2 = 0$$

$$\Delta = (a^2+1)^2 - 4(a^2 + pc^2) = a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2 - 4pc^2 = a^4 - 2a^2 + 1 - 4pc^2$$
$$= (a^2-1)^2 - 4pc^2 = (-c^2)^2 - 4pc^2 = c^4 - 4pc^2 = c^2(c^2 - 4p)$$

2. Première solution

On a $(a^2 - \lambda_i)(1-\lambda_i) + pc^2 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - \lambda_i)(1-\lambda_i) = -pc^2 < 0$

Donc $a^2 - \lambda_i$ et $1 - \lambda_i$ sont de signe opposés, comme $a \in]0,1[$ entraine que $0 < a^2 < 1$, par conséquent

$$a^2 - \lambda_i < 1 - \lambda_i$$

Ces deux réels sont de signes opposés on en déduit que

$$a^2 - \lambda_i < 0 < 1 - \lambda_i$$

La première inégalité entraine que $a^2 < \lambda_i$ et la seconde que $\lambda_i < 1$, ce qui donne

$$a^2 < \lambda_i < 1$$

Donc $|\lambda_i| < 1$

Seconde solution

$$\lambda_i = \frac{a^2 + 1 \pm \sqrt{c^2(c^2-4p)}}{2} = \frac{a^2 + 1 \pm c\sqrt{c^2 - 4p}}{2}$$

Car $c>0$

$$\lambda_1=\frac{a^2+1-c\sqrt{c^2-4p}}{2}<\frac{a^2+1}{2}<\frac{1+1}{2}=1$$

Et

$$c^2>c^2-4p\Rightarrow c>\sqrt{c^2-4p}\Rightarrow -\sqrt{c^2-4p}>-c\Rightarrow -c\sqrt{c^2-4p}>-c^2\Rightarrow a^2+1-c\sqrt{c^2-4p}$$
$$>a^2+1-c^2\Rightarrow\lambda_1=\frac{a^2+1-c\sqrt{c^2-4p}}{2}>\frac{a^2+1-c^2}{2}=\frac{1-c^2+1-c^2}{2}$$
$$=1-c^2=a^2>0$$

Donc $0<\lambda_1<1$, ce qui entraine que $|\lambda_1|<1$

D'autre part

$$c^2-4p<c^2\Rightarrow\sqrt{c^2-4p}<c\Rightarrow c\sqrt{c^2-4p}<c^2$$
$$\lambda_2=\frac{a^2+1+c\sqrt{c^2-4p}}{2}<\frac{a^2+1+c^2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Et

$$\lambda_2=\frac{a^2+1+c\sqrt{c^2-4p}}{2}>0$$

Donc $0<\lambda_2<1$, ce qui entraine que $|\lambda_2|<1$

3. Si $\Delta=0$

$$\lambda=\frac{a^2+1}{2}<\frac{1+1}{2}=1$$

Et

$$\lambda=\frac{a^2+1}{2}>0$$

Donc $0<\lambda<1$, ce qui entraine que $|\lambda|<1$

4. a. et b. Le produit des racines vaut

$$z\overline{z}=a^2+pc^2<a^2+c^2=1$$

Car $p<1$

Donc

$$|z^2|<1\Rightarrow|z|<1$$

Exercice 5.

Soient a,b,c trois réels fixés. On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} u_0,v_0\in\mathbb{R} \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=au_n,\quad v_{n+1}=bu_n+cv_n\end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=a^nu_0$.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$v_n=c^nv_0+\sum_{k=0}^{n-1}c^kba^{n-1-k}u_0=c^nv_0+bu_0\sum_{k=0}^{n-1}c^ka^{n-1-k}$$

3.
   a. Déduire de ce qui précède que

$$v_n=c^nv_0+bu_0\frac{a^n-c^n}{a-c},\quad \text{si}\quad a\neq c$$

   b. Que vaut v_n lorsque $a=c$?
4. Bonus : discuter de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant les valeurs de a,b et c.

Correction exercice 5.

1. Hypothèse de récurrence (H_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n u_0$
(H_0) est bien vérifié, montrons que l'hypothèse au rang n entraine celle au rang $n+1$

$$u_{n+1} = au_n = aa^n u_0 = a^{n+1}u_0$$

C'est bien la cas, donc (H_n) est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Remarque : il s'agit d'une suite géométrique, donc le résultat est connu mais comme l'énoncé demande de le montrer, il faut refaire la démonstration.

2. Hypothèse de récurrence (H_n)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = c^n v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c^k b a^{n-1-k} u_0 = c^n v_0 + bu_0 \sum_{k=0}^{n-1} c^k a^{n-1-k}$$

Pour $n = 1$

$$c^n v_0 + bu_0 \sum_{k=0}^{n-1} c^k a^{n-1-k} = cv_0 + bu_0 \sum_{k=0}^{0} c^k a^{1-1-k} = cv_0 + bu_0 = v_1$$

Donc (H_1) est vérifiée, montrons que l'hypothèse au rang n entraine celle au rang $n+1$

$$v_{n+1} = bu_n + cv_n = ba^n u_0 + cc^n v_0 + cbu_0 \sum_{k=0}^{n-1} c^k a^{n-1-k} = c^{n+1} v_0 + ba^n u_0 + cbu_0 \sum_{k=0}^{n-1} c^k a^{n-1-k}$$

On pose $k' = k+1$ dans la somme

$$k = 0 \Rightarrow k' = 1$$
$$k = n-1 \Rightarrow k' = n$$
$$v_{n+1} = c^{n+1} v_0 + ba^n u_0 + cbu_0 \sum_{k'=1}^{n} c^{k'-1} a^{n-k'}$$

Puis on rebaptise k' en k

$$v_{n+1} = c^{n+1} v_0 + ba^n u_0 + cbu_0 \sum_{k=1}^{n} c^{k-1} a^{n-k} = c^{n+1} v_0 + bc^0 a^{n-0} u_0 + bu_0 \sum_{k=1}^{n} c^k a^{n-k} =$$
$$= c^{n+1} v_0 + bu_0 \sum_{k=0}^{n} c^k a^{n-k}$$

Ce qui est bien de (H_{n+1})
Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = c^n v_0 + bu_0 \sum_{k=0}^{n-1} c^k a^{n-1-k}$$

3.

a.

$$v_n = c^n v_0 + bu_0 \sum_{k=0}^{n-1} c^k a^{n-1-k} = c^n v_0 + ba^{n-1} u_0 \sum_{k=0}^{n-1} c^k a^{-k}$$

Si $a \neq 0$

$$v_n = c^n v_0 + ba^{n-1} u_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{c}{a}\right)^k$$

Comme $\frac{c}{a} \neq 1$

$$v_n = c^n v_0 + ba^{n-1} u_0 \frac{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^n}{1 - \frac{c}{a}} = c^n v_0 + ba^{n-1} u_0 \frac{a}{a^n} \frac{a^n - c^n}{a - c} = c^n v_0 + bu_0 \frac{a^n - c^n}{a - c}$$

Si $a = 0$

$$v_n = c^n v_0 + bu_0 \sum_{k=0}^{n-1} c^k a^{n-1-k} = c^n v_0 + bu_0 c^{n-1}$$

Car seul le dernier terme de la somme est non nul et il vaut c^{n-1}

Donc

$$v_n = c^n v_0 + bu_0 c^{n-1} = c^n v_0 + bu_0 \frac{0^n - c^n}{0 - c}$$

Ce qui montrer que la formule reste valable pour $a = 0$.

b. Si $a = c$

$$v_n = c^n v_0 + bu_0 \sum_{k=0}^{n-1} c^k a^{n-1-k} = a^n v_0 + bu_0 \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-1-k} = a^n v_0 + bu_0 \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1}$$

$$= a^n v_0 + bu_0 a^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = a^n v_0 + nbu_0 a^{n-1}$$

4. Etude de la convergence de la suite (u_n)

Si $|a| < 1$

$$|a| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u^n = 0$$

Si $a = 1$ la suite est constante et égale à 1, (u_n) tend vers 1

Si $a = -1$ et $u_0 \neq 0$ la suite diverge

Si $a = -1$ et $u_0 = 0$ la suite est constante et égale à 0

Si $|a| > 1$ et $u_0 \neq 0$ la suite diverge

Si $a > 1$ et $u_0 = 0$ la suite est constante et égale à 0

Etude de la convergence de la suite (v_n)

- Si $a \neq c$

Si $|a| < 1$ et $|c| < 1$ alors (v_n) tend vers 0

Si $|a| < 1$ et $c = 1$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = v_0 + \frac{bu_0}{a - 1}$$

Si $u_0 = 0$ et $-1 < c < 1$

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$$

Si $u_0 = 0$ et $c = 1$

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = v_0$$

Si $u_0 = v_0 = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$$

Si $v_0 = \frac{bu_0}{a-c}$ et $-1 < a < 1$ alors

$$v_n = c^n \frac{bu_0}{a - c} + bu_0 \frac{a^n - c^n}{a - c} = \frac{c^n bu_0 + bu_0 a^n - bu_0\, c^n}{a - c} = \frac{bu_0 a^n}{a - c} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Si $v_0 = \frac{bu_0}{a-c}$ et $a = 1$ alors

$$v_n = c^n \frac{bu_0}{a - c} + bu_0 \frac{a^n - c^n}{a - c} = \frac{c^n bu_0 + bu_0 a^n - bu_0\, c^n}{a - c} = \frac{bu_0}{a - c} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{bu_0}{a - c}$$

Dans les autres cas, la suite diverge.

- Si $a = c$

Si $-1 < a < 1$ alors $v_n \to 0$

Si $b = 0$ et $c = 1$ alors $v_n = v_0 \to v_0$

Si $u_0 = v_0 = 0$ alors $v_n \to 0$

Dans les autres cas elle diverge.