**Examen session 2 (2 heures)**
**22 juin 2017**

Exercice 1.

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Ecrire à l'aide de quantificateurs la propriété « $f$ est strictement croissante »
2. Ecrire à l'aide de quantificateurs la propriété « $f$ n'est pas strictement croissante »

Exercice 2.

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies par :

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \mapsto 2n$$

$$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Calculer $f(0), f(4), g(0), g(1), g(2)$ et $g(3)$.
2. Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de $f$ et $g$.
3. Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.
4. Pour chacune des applications $g \circ f$ et $f \circ g$, dire si elle est injective, surjective, bijective.

Exercice 3.

Soit $f: [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) = 0$. On suppose que $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et dérivable à droite en 0 avec $f'(0) = 0$. On désigne par $g$ l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1.
   a. Justifier que $g$ est continue sur $]0, +\infty[$.
   b. En observant que pour tout $x > 0$
   $$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$
   Déterminer
   $$\lim_{x \to 0^+} g(x)$$
   c. En déduire que $g$ est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Expliquer pourquoi $g$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Montrer ensuite que :
$$\forall x \in \, ]0, +\infty[, g'(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}$$
3. On suppose désormais que $f'$ est croissante sur $]0, +\infty[$.
   a. Rappelez le théorème des accroissements finis.
   b. Appliquer ce théorème à $f$ sur l'intervalle $]0, x[$, où $x > 0$ est donné.
   c. Montrer qu'il existe $c \in \, ]0, x[$ tel que :
   $$g'(x) = \frac{f'(x) - f'(c)}{x}$$
   d. Que peut-on en déduire pour la croissance de $g$ sur $[0, +\infty[$ ?

Exercice 4.

On considère des réels $a, c$ et $p$ tels que : $a, c, p \in ]0,1[$ et $a^2 + c^2 = 1$. On s'intéresse dans cet exercice aux solutions de l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$ :

$$(a^2 - x)(1 - x) + pc^2 = 0$$

1. Montrer que le discriminant de cette équation est $\Delta = c^2(c^2 - 4p)$.
2. Dans le cas $\Delta > 0$, montrer que les deux solutions réelles $\lambda_1$ et $\lambda_2$ vérifient $|\lambda_i| < 1$ pour $i \in \{1,2\}$.
3. Dans le cas $\Delta = 0$, montrer que la solution réelle $\lambda$ vérifie $|\lambda| < 1$.
4. Lorsque $\Delta < 0$ on note $z$ et $\overline{z}$ les deux solutions complexes conjuguées de l'équation, avec $z \in \mathbb{C}$.
   a. Montrer que $z\overline{z} = a^2 + pc^2$.
   b. En déduire que $|z| < 1$.

Exercice 5.

Soient $a, b, c$ trois réels fixés. On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} u_0, v_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n, \quad v_{n+1} = bu_n + cv_n \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n u_0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = c^n v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c^k b a^{n-1-k} u_0 = c^n v_0 + b u_0 \sum_{k=0}^{n-1} c^k a^{n-1-k}$$

3. 
   a. Déduire de ce qui précède que

$$v_n = c^n v_0 + b u_0 \frac{a^n - c^n}{a - c}, \quad \text{si} \quad a \neq c$$

   b. Que vaut $v_n$ lorsque $a = c$ ?
4. Bonus : discuter de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant les valeurs de $a, b$ et $c$.