Contrôle Terminal

On attachera la plus grande importance à la rédaction. Toute réponse doit être justifiée et introduite par une phrase. Au cours d'un exercice, si vous ne pouvez répondre à une question, il vous est recommandé de poursuivre en admettant le résultat demandé. L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil (téléphone portable,…) est prohibé.

Exercice 1.

Calculer, si elle existe la limite suivante

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos(x)}$$

Correction exercice 1   3 points

1 point pour le d.l. du numérateur+1 point pour le d.l. du dénominateur+1 point pour la limite

$$\frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos(x)}=\frac{1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}=\frac{-x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\frac{-1+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)}\to -2$$

Exercice 2.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle f définie par :

$$f(X)=\frac{2X}{(X+1)^2(1-X)}$$

2. Calculer

$$\int_{-8}^{-3}\frac{1}{t\left(1+\sqrt{1-t}\right)}dt$$

Indication : on pourra se servir de la question 1 et du changement de variable $x=\sqrt{1-t}$.

Correction exercice 2 4 points+5 points

1. 1 point pour la forme de la décomposition1 point par coefficient
   Il existe a, b et c réels tels que :

$$\frac{2X}{(X+1)^2(1-X)}=\frac{a}{X+1}+\frac{b}{(X+1)^2}+\frac{c}{1-X}$$

$$b=\left[\frac{2X}{1-X}\right]_{X=-1}=-1$$

$$c=\left[\frac{2X}{(X+1)^2}\right]_{X=1}=\frac{1}{2}$$

   On multiplie par X, puis $X\to+\infty$

$$0=a-c\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$\frac{2X}{(X+1)^2(1-X)}=\frac{\frac{1}{2}}{X+1}-\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{1-X}$$

2. 3 point pour le changement de variable+1,5 points pour la primitive en t+0,5 pour I correct.
   On fait le changement de variable bijectif $x=\sqrt{1-t}$, on doit trouver t en fonction de x.

$$x=\sqrt{1-t}\Leftrightarrow x^2=1-t\Leftrightarrow t=1-x^2$$
$$dt=-2xdx$$
$$t=-8\Rightarrow x=3$$
$$t=-3\Rightarrow x=2$$
$$\frac{1}{t\left(1+\sqrt{1-t}\right)}=\frac{1}{(1-x^2)(1+x)}=\frac{1}{(1-x)(1+x)(1+x)}=\frac{1}{(x+1)^2(1-x)}$$
$$\int_{-8}^{-3}\frac{1}{t\sqrt{1-t}+t}dt=\int_3^2\frac{1}{(x+1)^2(1-x)}(-2xdx)=\int_2^3\frac{2x}{(x+1)^2(1-x)}dx$$
$$=\int_2^3\left(\frac{\frac{1}{2}}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{1-x}\right)dx=\frac{1}{2}\int_2^3\frac{dx}{1+x}+\int_2^3-\frac{1}{(1+x)^2}dx+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{dx}{1-x}$$
$$=\frac{1}{2}[\ln|1+x|]_2^3+\left[\frac{1}{1+x}\right]_2^3-\frac{1}{2}[\ln|1-x|]_2^3=\frac{1}{2}\ln(4)-\frac{1}{2}\ln(3)+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(1)$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3\times 2}\right)-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{12}$$

Problème 1

Soit $f:[e,+\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x\in[e,+\infty[$ par :

$$f(x)=-1+\int_e^x\frac{t}{\ln(t)}dt$$

1. Montrer que f est bien définie sur $[e,+\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable sur $[e,+\infty[$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout $x\in[e,+\infty[$.
3. Montrer que pour tout $t\in[e,+\infty[$, $t\geq\ln(t)$.
4. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Montrer qu'il existe un unique θ dans $]e,+\infty[$ tel que $f(\theta)=0$.
7. On souhaite montrer que la fonction f croît plus vite en $+\infty$ que n'importe quelle fonction affine.
   a. Montrer que f est de classe C^2 sur $[e,+\infty[$ et en donner l'expression de $f''(x)$ pour tout $x\in[e,+\infty[$. Quel est le signe de f'' ?
   b. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f, montrer que pour tout $a\in[e,+\infty[$ et pour tout $x\in[e,+\infty[$:
   $$f(x)\geq f(a)+\frac{a}{\ln(a)}(x-a).$$
   c. Soit $\alpha\in\mathbb{R}^+$ et $\beta\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $M\in[e,+\infty[$ tel que pour tout $x\geq M$:
   $$f(x)\geq\alpha x+\beta$$
   Pour cette question, toute tentative de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Correction problème 1 : 13 points

1. 0,5 point.
   Pour tout $x\geq e$.
   $t\to\frac{t}{\ln(t)}$ est continue sur $[e,x]$ donc f est bien définie sur $[e,+\infty[$.
2. 0,5 point pour f dérivable+1 point pour $f'(x)$.
   Pour tout $x\geq e$.
   $t\to\frac{t}{\ln(t)}$ est continue sur $[e,x]$ donc f est bien dérivable sur $[e,+\infty[$, et même C^1.
   $$f'(x)=\frac{x}{\ln(x)}$$
3. 2 points

Soit g la fonction définie pour tout $t \geq e$ par $g(t) = t - \ln(t)$, g est dérivable et $g'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t} > 0$ donc g est croissante donc pour tout $t \geq e$ on a $g(t) \geq g(e) = e - \ln(e) = e - 1 \geq 0$, ce qui montre que $t \geq \ln(t)$.

4. 2 points

Comme pour tout $t \geq e$, $\ln(t) > 0$ on a $\frac{t}{\ln(t)} \geq 1$, donc pour tout $x \geq e$

$$f(x) = -1 + \int_e^x \frac{t}{\ln(t)} dt \geq -1 + \int_e^x dx = -1 + x - e \to +\infty$$

Lorsque $x \to +\infty$.

5. 1 point

D'après les questions précédentes

x	e $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$f(e)$ $\nearrow$ $+\infty$

Avec $f(e) = -1 + \int_e^e \frac{t}{\ln(t)} dt = -1$

6. 1,5 points

D'après la question 5, f est une bijection de $]e, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$, donc 0 admet un unique antécédent $\theta \in]e, +\infty[$.

Autre méthode :

Comme f est continue de $]e, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $\theta \in]e, +\infty[$ tel que $f(\theta) = 0$. D'autre part comme f est strictement croissante θ est unique.

7.

a. 1,5 point

Pour tout $x \geq e$, $f'(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ est C^1 donc f est C^2.

$$f''(x) = \frac{\ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$$

Comme ln est croissante $\ln(x) \geq \ln(e) = 1$, ce qui montre que $f''(x) \geq 0$.

b. 2 points

Si $x = a$, on a $f(a) \geq f(a) + \frac{\ln(a)}{a}(x - a)$ l'inégalité est vraie.

Première méthode (pas terrible)

Si $x \neq a$, d'après la formule de Taylor-Lagrange, puisque f est continue sur $[a, x]$ ou $[x, a]$ f est dérivable sur $]a, x[$ ou $]x, a[$, il existe c entre a et x tel que :

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a) = f(a) + \frac{\ln(c)}{c}(x - a)$$

Si $x > a$ alors $a < c < x$, comme f' est croissante (puisque $f''(x) \geq 0$) par conséquent $\frac{\ln(c)}{c} \geq \frac{\ln(a)}{a} > 0$ et comme $x - a > 0$, on a

$$\frac{\ln(c)}{c}(x - a) \geq \frac{\ln(a)}{a}(x - a)$$

Ce qui entraine que

$$f(x) = f(a) + \frac{\ln(c)}{c}(x - a) \geq f(a) + \frac{\ln(a)}{a}(x - a)$$

Si $x < a$ alors $x < c < a$, comme f' est croissante on en déduit que $0 < \frac{\ln(c)}{c} < \frac{\ln(a)}{a}$, inégalité que l'on multiplie par $x - a < 0$, par conséquent

$$(x - a)\frac{\ln(c)}{c} > (x - a)\frac{\ln(a)}{a}$$

Ce qui entraine que

$$f(x)=f(a)+\frac{\ln(c)}{c}(x-a)\geq f(a)+\frac{\ln(a)}{a}(x-a)$$

Seconde méthode (meilleure), on utilise la formule de Taylor à l'ordre 2, il existe c entre a et x tel que :

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(c)$$

Comme $f''(c)\geq 0$, Ce qui entraine que

$$f(x)\geq f(a)+(x-a)\frac{a}{\ln(a)}$$

c. 1 point

Première méthode

On prend $\alpha\geq 0$, on choisit a tel que $\frac{a}{\ln(a)}>\alpha$, ce qui est possible car $\frac{x}{\ln(x)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

Soit fonction g définie pour tout $x\geq e$ par $g(x)=f(x)-(\alpha x+\beta)$

$$g'(x)=f'(x)-\alpha=\frac{x}{\ln(x)}-\alpha>\frac{a}{\ln(a)}-\alpha>0$$

Pour x plus grand que a, donc pour un x assez grand.

On peut aussi dire que pour a assez grand $\frac{a}{\ln(a)}$ est plus grand que α, ce qui évite de dériver g.

$$g(x)\geq f(a)+\frac{a}{\ln(a)}(x-a)-\alpha x-\beta=\left(\frac{a}{\ln(a)}-\alpha\right)x+f(a)-\frac{a^2}{\ln(a)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$$

Une fonction croissante qui tend vers $+\infty$ est positive à partir d'un certain rang.

Donc pour x assez grand $g(x)>0$ et alors $f(x)>\alpha x+\beta$ pour x assez grand.

Seconde méthode

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}^+,\forall\beta\in\mathbb{R},\exists M\in[e,+\infty[\text{ tel que }\forall x\geq M: f(x)\geq\alpha x+\beta$$

A pour négation

$$\exists\alpha\in\mathbb{R}^+,\exists\beta\in\mathbb{R},\forall M\in[e,+\infty[\text{ tel que }\forall x\geq M: f(x)<\alpha x+\beta$$

On prend $M=e$

$$\exists\alpha\in\mathbb{R}^+,\exists\beta\in\mathbb{R},\text{ tel que }\forall x\geq e: f(x)<\alpha x+\beta$$

Comme à la question 7.b. on a

$$\forall a\in[e,+\infty[,\forall x\in[e,+\infty[,f(x)\geq f(a)+\frac{a}{\ln(a)}(x-a)$$

Cela entraine que

$$f(a)+\frac{a}{\ln(a)}(x-a)\leq f(x)<\alpha x+\beta\Rightarrow f(a)+\frac{a}{\ln(a)}x-\frac{a^2}{\ln(a)}<\alpha x+\beta$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{a}{\ln(a)}-\alpha\right)+f(a)-\frac{a^2}{\ln(a)}-\beta<0\quad(*)$$

Pour

$$\frac{a}{\ln(a)}>\alpha$$

Ce qui est possible puisque $\frac{x}{\ln(x)}\to+\infty$

$x\left(\frac{a}{\ln(a)}-\alpha\right)+f(a)-\frac{a^2}{\ln(a)}-\beta\to+\infty$ d'où la contradiction.

Par conséquent

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}^+,\forall\beta\in\mathbb{R},\exists M\in[e,+\infty[\text{ tel que }\forall x\geq M: f(x)\geq\alpha x+\beta$$

Problème 2

On considère la matrice suivante

$$A=\begin{pmatrix}-1&-1&4\\0&-1&4\\0&-1&3\end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A (f est donc l'endomorphisme canoniquement associé à A).

1. Exprimer $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$.
2. Soit $E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = -u\}$, montrer que est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner un vecteur non nul u_1.
3. Déterminer un vecteur non nul u_2 tel que $u_2 \in \ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})$. (On pourra prendre 1 comme première composante de u_2).
4. Déterminer le rang de l'endomorphisme $f - Id_{\mathbb{R}^3}$ de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer un vecteur u_3 tel que $f(u_3) = u_2 + u_3$ (on pourra prendre 0 comme première composante de u_3).
6. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3\ )$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Déterminer la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}$.
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
9. Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}$.
10. Exprimer A en fonction de P, T et P^{-1}.
11. Déterminer P^{-1}.
12. Déterminer A^n.

Correction problème 2 : 17 points

1. 0,5 point pour chaque $f(e_i)$=1,5 points
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$
donc
$$f(e_1) = -e_1; f(e_2) = -e_1 - e_2 - e_3; f(e_3) = 4e_1 + 4e_2 + 3e_3$$
2. 0,5 pour ev+1 point pour u_1.
Première méthode :
$E_{-1} = \ker(f + id_{\mathbb{R}^3})$, $f + id_{\mathbb{R}^3}$ est une application linéaire donc E_{-1} est un sous-espace vectoriel. On remarque que $f(e_1) = -e_1$ donc e_1 est solution. Mais cela ne montre pas qu'il n'y a que les vecteurs proportionnels à $u_1 = e_1$ qui soit solution il faut aller à la troisième méthode.
Deuxième méthode : on remarque que $f(e_1) = -e_1$ donc e_1 est solution.
Mais cela ne montre pas qu'il n'y a que les vecteurs proportionnels à $u_1 = e_1$ qui soit solution, ceci dit l'énoncé ne demande qu'un vecteur donc cela suffit. Mais alors il faut montrer que E_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donc que
$0_{\mathbb{R}^3}$ vérifie $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3}$ car f est linéaire donc l'image du vecteur nul est le vecteur nul.
Et que pour tous $u, v \in E_{-1}$ et pour tous λ, μ réels
$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$
Car f est linéaire, puisque $f(u) = -u$ et $f(v) = -v$ car $u, v \in E_{-1}$
$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda(-u) + \mu(-v) = -(\lambda u + \mu v)$$
Ce qui montre que $\lambda u + \mu v \in E_{-1}$
Troisième méthode
Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}_c$.

$$x \in E_{-1} \Leftrightarrow AX = -X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 + 4x_3 = -x_1 \\ -x_2 + 4x_3 = -x_2 \\ -x_2 + 3x_3 = -x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_3 = 0 \\ -x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Donc $x = (x_1, 0{,}0) = x_1(1{,}0{,}0)$, on pose $u_1 = (1{,}0{,}0) = e_1$ ce qui montre que $E_{-1} = vect(u_1)$ donc que E_{-1} est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur u_1.

3. 1 point.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}_c$.

$$x \in \ker(f - Id_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow (A - I)X = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = -x_2 + 4x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

Donc $x = (x_3, 2x_3, x_3) = x_3(1{,}2{,}1)$, on pose $u_2 = (1{,}2{,}1) = e_1 + 2e_2 + e_3$ ce qui montre que $\ker(f - Id_{\mathbb{R}^3}) = vect(u_2)$ est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur u_2.

4. 1 point

D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $f - Id_{\mathbb{R}^3}$

$$\dim(\ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})) + \mathrm{rg}\big((f - Id_{\mathbb{R}^3})\big) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

On en déduit que $\mathrm{rg}\big((f - Id_{\mathbb{R}^3})\big) = 2$

5. 1,5 points

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}_c$.

$$f(u_3) = u_2 + u_3 \Leftrightarrow (f - id_{\mathbb{R}^3})(u_3) = u_2 \Leftrightarrow (A - I)X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ -2x_2 + 4x_3 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_2 = 2x_3 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - (2x_3 - 1) + 4x_3 = 1 \\ x_2 = 2x_3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 - 1 \end{cases}$$

Pour avoir la première composante de u_3 nul, il faut prendre $x_3 = x_1 = 0$ et donc $x_2 = -1$, ce qui donne $u_3 = -e_2$

6. 1,5 points

Soient α, β, γ trois réels

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(1{,}0{,}0) + \beta(1{,}2{,}1) + \gamma(0, -1{,}0) = (0{,}0{,}0) \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\beta - \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une famille libre à trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

7. 2 points

On a $f(u_1) = -u_1$, $f(u_2) = u_2$ et $f(u_2) = u_2 + u_3$ donc

$$T = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix}$$

8. 1,5 points

Pour $n = 0$ on a bien

$$I = T^0 = \begin{pmatrix} (-1)^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

L'initialisation est vérifiée

Si

$$T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$T^{n+1} = T^n T = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui achève la récurrence

9. 1 point

On exprime u_1, u_2 et u_3 en fonction de e_1, e_2 et e_3, c'est-à-dire

$$u_1 = e_1 ; u_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 \text{ et } u_3 = -e_2$$

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

10. 1 point

D'après le théorème de changement de base $T = P^{-1}AP$ ou $A = PTP^{-1}$.

11. 1,5 point

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$

$$PX' = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{cases} x'_1 + x'_2 = x_1 \\ 2x'_2 - x'_3 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 \end{array}\begin{cases} x'_1 = -x'_2 + x_1 \\ x'_3 = 2x'_2 - x_2 \\ x'_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = x_1 - x_3 \\ x'_3 = -x_2 + 2x_3 \\ x'_2 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = x_1 - x_3 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = -x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

12. 2 points

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & 1 & n \\ 0 & 2 & 2n-1 \\ 0 & 1 & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & -n & (-1)^{n+1} + 1 + 2n \\ 0 & -2n+1 & 2 + 2(2n-1) \\ 0 & -n & 1 + 2n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & -n & (-1)^{n+1} + 1 + 2n \\ 0 & -2n+1 & 4n \\ 0 & -n & 2n+1 \end{pmatrix}$$