Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2020-2021

Fondamentaux des mathématiques II — 17 mai 2021. Durée : 2 h 00

Contrôle terminal

On attachera la plus grande importance à la rédaction. Toute réponse doit être justifiée et introduite par une phrase. Au cours d'un exercice, si vous ne pouvez répondre à une question, il vous est recommandé de poursuivre en admettant le résultat demandé. L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil (téléphone portable, ...) est prohibé.

Exercice 1.

Calculer si elle existe la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x}.$$

Exercice 2.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle
$$F(X) = \frac{2X}{(X+1)^2(1-X)}.$$
2. En déduire la valeur de l'intégrale
$$I = \int_{-8}^{-3} \frac{1}{t(1+\sqrt{1-t})}\,\mathrm{d}t.$$
Indication : on pourra utiliser le changement de variable $x = \sqrt{1-t}$.

Problème 1.

Soit $f : [e, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x dans $[e, +\infty[$ par :

$$f(x) = -1 + \int_e^x \frac{t}{\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $[e, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable sur $[e, +\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée $f'(x)$ pour tout $x \in [e, +\infty[$.
3. Montrer que pour tout $t \in [e, +\infty[$, $t \geq \ln t$.
4. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Dresser le tableau des variations de f.
6. Montrer qu'il existe un unique réel θ dans $]e, +\infty[$ tel que $f(\theta) = 0$.

7. On souhaite montrer que la fonction f croît plus vite en $+\infty$ que n'importe quelle fonction affine.
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[e, +\infty[$ et donner l'expression de $f''(x)$ pour tout $x \in [e, +\infty[$. Quel est le signe de f'' ?
   (b) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f, montrer que pour tout $a \in [e, +\infty[$ et tout $x \in [e, +\infty[$:
   $$f(x) \geq f(a) + \frac{a}{\ln a}(x-a).$$
   (c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $M \in [e, +\infty[$ tel que pour tout $x \geq M$:
   $$f(x) \geq \alpha x + \beta.$$
   Pour cette question, toute tentative de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Problème 2.

On considère la matrice suivante :
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Soit $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit f l'endomorphime de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A (f est donc l'endomorphisme canoniquement associé à A).

1. Exprimer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$.
2. Soit $E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3,\ f(u) = -u\}$. Montrer que E_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer un vecteur $u_1 \in E_{-1}$ non nul.
3. Déterminer un vecteur non nul u_2 tel que $u_2 \in \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ (on pourra prendre 1 comme première composante de u_2).
4. Déterminer le rang de l'endomorphisme $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
5. Déterminer un vecteur u_3 tel que $f(u_3) = u_2 + u_3$ (on pourra prendre 0 comme première composante de u_3).
6. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Déterminer la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}$.
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
9. Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}$.
10. Exprimer A en fonction de P, T et P^{-1}.
11. Déterminer P^{-1}.
12. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.