Université Claude Bernard-Lyon 1 | Semestre de printemps 2019
Fondamentaux des mathématiques 2 | 14 mai 2019

Examen final du 14 mai 2019 de 10h à 12h

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaitre sur la copie. Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont strictement interdits.
Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené.e à prendre.

Exercice 1.

Soit $u : E \to F$ une application linéaire avec $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = q$ avec $p \geq q$.
Montrer que $\dim(\ker(u)) \geq p - q$.

Correction exercice1

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(im(u)\big) = \dim(E) \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = p - \dim\big(im(u)\big)$$

Comme $\dim\big(im(u)\big) \leq q$ on a $-\dim\big(im(u)\big) \geq -q$, par conséquent

$$\dim(\ker(u)) \geq p - q$$

Exercice 2.

1. Trouver toutes les solutions de l'équation $y'' + 9y = 0$.
2. Soit $y'' + 9y = \sin(3x)$. Trouver une solution particulière de cette équation de la forme $y_P = x(A\cos(3x) + B\sin(3x))$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.
3. Trouver une solution particulière de l'équation $y'' + 9y = xe^{3x}$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + 9y = \sin(3x) + xe^{3x}$.
5. Montrer que le système $y'' + 9y = \sin(3x) + xe^{3x}$ avec $y'(0) = y(0) = 0$ admet une unique solution que l'on déterminera.

Correction exercice2

1. L'équation caractéristique est $r^2 + 9 = 0$, dont les racines sont $\pm 3i$, les solutions sont :
$$y = \lambda_1 \cos(3x) + \lambda_2 \sin(3x)\,, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$
2. $3i$ est racine de l'équation caractéristique de l'équation homogène donc il faut multiplier par x la solution « naturelle ».
$$y_P = x(A\cos(3x) + B\sin(3x))$$
$$y_P' = A\cos(3x) + B\sin(3x) + x(-3A\sin(3x) + 3B\cos(3x))$$
$$y_P'' = -6A\sin(3x) + 6B\cos(3x) - 9x(A\cos(3x) + B\sin(3x))$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$y_P'' + 9y_P = \sin(3x) \Leftrightarrow -6A\sin(3x) + 6B\cos(3x) = \sin(3x) \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{6} \\ B = 0 \end{cases}$$

Alors $y_P = -\frac{1}{6}x\cos(3x)$

3. On cherche une solution particulière de la forme
$$y_P = (Ax + B)e^{3x}, A, B \in \mathbb{R}$$

$$y_P' = 3(Ax+B)e^{3x} + Ae^{3x} = (3Ax+3B+A)e^{3x}$$
$$y_P'' = 3Ae^{3x} + 3(3Ax+3B+A)e^{3x} = (9Ax+9B+6A)e^{3x}$$
On remplace dans $y_P'' + 9y_P = xe^{3x} \quad (*)$
$$(*) \Leftrightarrow (9Ax+9B+6A)e^{3x} + 9(Ax+B)e^{3x} = xe^{3x} \Leftrightarrow (18Ax+18B+6A)e^{3x} = xe^{3x}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18A = 1 \\ 18B + 6A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{18} \\ B = -\dfrac{1}{54} \end{cases}$$
$$y_P = \left(\frac{x}{18} - \frac{1}{54}\right)e^{3x}$$
4. Une solution particulière de $y'' + 9y = \sin(3x) + xe^{3x}$ est
$$y_P = -\frac{1}{6}x\cos(3x) + \left(\frac{x}{18} - \frac{1}{54}\right)e^{3x}$$
La solution générale est
$$y = \lambda_1\cos(3x) + \lambda_2\sin(3x) - \frac{1}{6}x\cos(3x) + \left(\frac{x}{18} - \frac{1}{54}\right)e^{3x}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$
5.
$$y' = -3\lambda_1\sin(3x) + 3\lambda_2\cos(3x) - \frac{1}{6}\cos(3x) + \frac{1}{6}x\sin(3x) + \frac{1}{18}e^{3x} + 3\left(\frac{x}{18} - \frac{1}{54}\right)e^{3x}$$
$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \dfrac{1}{54} = 0 \\ 3\lambda_2 - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{18} - \dfrac{1}{18} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{54} \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{18} \end{cases}$$
Alors
$$y = \frac{1}{54}\cos(3x) + \frac{1}{18}\sin(3x) - \frac{1}{6}x\cos(3x) + \left(\frac{x}{18} - \frac{1}{54}\right)e^{3x}$$

Exercice 3.

Soit f la fonction définie pour $x < \ln(2)$ par :
$$f(x) = \int_0^x e^t \ln(1 - 5e^{-t} + 6e^{-2t})\,dt$$
On admettra sans démonstration que pour tout $t < \ln(2)$ on a $1 - 5e^{-t} + 6e^{-2t} > 0$ et que la fonction f est bien définie pour tout $x < \ln(2)$.

1. Calculer $\int \frac{5y-12}{y^2-5y+6}\,dy$
2. A l'aide du changement de variable $y = e^t$, puis d'une intégration par partie, calculer $f(x)$.
3. A l'aide de la formule de Taylor-Young donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x)$. *Cette question est indépendante de la première et de la seconde question.*

Correction exercice3

1. Il faut décomposer $\frac{5y-12}{y^2-5y+6}$ en éléments simple, comme $y^2 - 5y + 6 = (y-2)(y-3)$
$$\frac{5y-12}{y^2-5y+6} = \frac{5y-12}{(y-2)(y-3)} = \frac{a}{y-2} + \frac{b}{y-3}$$
$$a = \left[\frac{5y-12}{y-3}\right]_{y=2} = 2$$
$$b = \left[\frac{5y-12}{y-2}\right]_{y=3} = 3$$

Donc

$$\frac{5y-12}{y^2-5y+6}=\frac{5y-12}{(y-2)(y-3)}=\frac{2}{y-2}+\frac{3}{y-3}$$

D'où l'on déduit que

$$\int\frac{5y-12}{y^2-5y+6}dy=\int\left(\frac{2}{y-2}+\frac{3}{y-3}\right)dy=2\ln|y-2|+3\ln|y-3|+K,K\in\mathbb{R}$$

2. $dy=e^t dt$, si $t=0$ alors $y=1$ et si $t=x$ alors $y=e^x$ donc

$$f(x)=\int_1^{e^x}\ln\left(1-\frac{5}{y}+\frac{6}{y^2}\right)dy=\left[y\ln\left(1-\frac{5}{y}+\frac{6}{y^2}\right)\right]_1^{e^x}-\int_1^{e^x}y\frac{\frac{5}{y^2}-\frac{12}{y^3}}{1-\frac{5}{y}+\frac{6}{y^2}}dy$$

$$=e^x\ln(1-5e^{-x}+6e^{-2x})-\ln(2)-\int_1^{e^x}y\frac{\frac{5y-12}{y^3}}{\frac{y^2-5y+6}{y^2}}dy$$

$$=e^x\ln(1-5e^{-x}+6e^{-2x})-\ln(2)-\int_1^{e^x}\frac{5y-12}{y^2-5y+6}dy$$

$$=e^x\ln(1-5e^{-x}+6e^{-2x})-\ln(2)-[2\ln|y-2|+3\ln|y-3|]_1^{e^x}$$

$$=e^x\ln(1-5e^{-x}+6e^{-2x})-\ln(2)-(2\ln|e^x-2|+3\ln|e^x-3|)$$

$$+(2\ln|1-2|+3\ln|1-3|)$$

$$=e^x\ln(1-5e^{-x}+6e^{-2x})-\ln(2)-2\ln(2-e^x)-3\ln(3-e^x)+3\ln(2)$$

$$=e^x\ln(1-5e^{-x}+6e^{-2x})+2\ln(2)-2\ln(2-e^x)-3\ln(3-e^x)$$

3. $f(0)=0$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=e^x\ln(1-5e^{-x}+6e^{-2x})\Rightarrow f'(0)=\ln(2)$$

$$f''(x)=e^x\ln(1-5e^{-x}+6e^{-2x})+e^x\frac{5e^{-x}-12e^{-2x}}{1-5e^{-x}+6e^{-2x}}\Rightarrow f''(0)=\ln(2)-\frac{7}{2}$$

f est indéfiniment dérivable donc

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+o(x^2)=\ln(2)\,x+\left(\frac{\ln(2)}{2}-\frac{7}{4}\right)x^2+o(x^2)$$

Exercice 4.

Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini dans la base canonique $\beta=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ par sa matrice

$$A=\begin{pmatrix}3&0&-2&0\\-2&1&2&0\\4&0&-3&0\\-2&2&2&-1\end{pmatrix}$$

On note id l'identité de $\mathbb{R}^4$, $E_1=\ker(s-id)$ et $E_{-1}=\ker(s+id)$

1. Calculer A^2, en déduire s^2, c'est-à-dire $s\circ s$.
2. Déterminer une base (u_1,u_2) de E_1.
3. En déduire $\dim\big(im(s-id)\big)$.
4. Montrer que $im(s-id)\subset E_{-1}$. Puis que $\dim(E_{-1})\geq 2$
5. Montrer que $E_1\cap E_{-1}=\{0_E\}$.
6. A l'aide de la formule de Grassmann montrer que $\dim(E_{-1})\leq 2$. Puis que $\dim(E_{-1})=2$.
   Si vous n'arrivez pas à faire cette question, il est toujours possible de trouver une base (v_1,v_2) de E_{-1}.
7. Comparer $im(s-id)$ et E_{-1}.
8. Montrer que $E_1\oplus E_{-1}=\mathbb{R}^4$.

9. Soit (u_1, u_2) une base de E_1 et (v_1, v_2) une base de E_{-1}, montrer que (u_1, u_2, v_1, v_2) est une base $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice de s dans cette base.

Correction exercice4

Remarque préliminaire :

$$x \in E_1 \Leftrightarrow (s - id)(x) = 0_E \Leftrightarrow s(x) - x = 0_E \Leftrightarrow s(x) = x$$
$$x \in E_{-1} \Leftrightarrow (s + id)(x) = 0_E \Leftrightarrow s(x) + x = 0_E \Leftrightarrow s(x) = -x$$

1.
$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Donc $s^2 = id$

2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_1$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans β
$$x \in E_1 \Leftrightarrow (s - id)(x) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow s(x) - x = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow AX - X = O_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow (A - I)X = O_{\mathbb{R}^4}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$$
$$x = (x_3, x_4, x_3, x_4) = x_3(1,0,1,0) + x_4(0,1,0,1,0)$$
$$E_1 = Vect(e_1 + e_3, e_2 + e_4)$$
Ces deux vecteurs, $u_1 = e_1 + e_3$ et $u_2 = e_2 + e_4$, ne sont pas proportionnels, ils forment donc une famille libre, qui de plus engendre E_1, c'est une base de E_1.

3. D'après le théorème du rang appliquer à $s - id$
$$\dim(\ker(s - id) + \dim\big(im(s - id)\big) = \dim(\mathbb{R}^4)$$
Ce qui est équivalent à $2 + \dim\big(im(s - id)\big) = 4$, par conséquent
$$\dim\big(im(s - id)\big) = 2$$

Autre méthode
$$im(s - id) = Vect(2e_1 - 2e_2 + 4e_3 - 2e_4, 2e_4, -2e_1 + 2e_2 - 4e_3 + 2e_4, -2e_4)$$
$$= Vect(e_1 - e_2 + 2e_3 - e_4, e_4)$$
Ces deux vecteurs, ne sont pas proportionnels, ils forment donc une famille libre, qui de plus engendre $im(s - id)$, c'est une base de $im(s - id)$. Alors $\dim\big(im(s - id_E)\big) = 2$

4. Soit $y \in im(s - id)$, il existe $x \in \mathbb{R}^4$ tel que $y = (s - id)(x) = s(x) - x$, on en déduit que :
$$s(y) = s^2(x) - s(x) = x - s(x) = -(s(x) - x) = -y$$
Ce qui montre que $y \in E_{-1}$, d'où
$$im(s - id) \subset E_{-1}.$$
$im(s - id_E) \subset E_{-1}$ entraine que $2 = \dim\big(im(s - id)\big) \leq \dim(E_{-1})$

5. Soit $x \in E_1 \cap E_{-1}$, $s(x) = x$ et $s(x) = -x$ d'après la remarque préliminaire, par conséquent $-x = x$ et donc $x = 0_E$, ce qui montre que $E_1 \cap E_{-1} = \{0_E\}$.

6.
$$\dim(E_1 + E_{-1}) = \dim(E_1) + \dim(E_{-1}) - \dim(E_1 \cap E_{-1}) = \dim(E_1) + \dim(E_{-1})$$

Comme $E_1 + E_{-1} \subset E$, $\dim(E_1 + E_{-1}) \leq \dim(\mathbb{R}^4) = 4$, on a donc

$$\dim(E_1) + \dim(E_{-1}) \leq 4$$

Ce qui équivaut à $\dim(E_{-1}) \leq 4 - \dim(E_1) = 2$.

D'après la question 4, $2 \leq \dim(E_{-1})$

On en déduit que $\dim(E_{-1}) = 2$.

Autre méthode

Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_{-1}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans β

$$x \in E_1 \Leftrightarrow (s + id)(x) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow s(x) + x = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow AX + X = O_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow (A + I)X = O_{\mathbb{R}^4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 2x_1 \\ x_2 = -x_1 \end{cases}$$

$$x = (x_1, -x_1, 2x_1, x_4) = x_1(1, -1, 2, 0) + x_4(0,0,0,1)$$

$$E_1 = Vect(e_1 - e_2 + 2e_3, e_4)$$

Ces deux vecteurs, $v_1 = e_1 - e_2 + 2e_3$ et $u_2 = e_4$, ne sont pas proportionnels, ils forment donc une famille libre, qui de plus engendre E_{-1}, c'est une base de E_{-1}.

Alors $\dim(E_{-1}) = 2$

7. $\dim\big(im(s - id)\big) = \dim(E_{-1})$ et d'après la question 4 $im(s - id) \subset \mathrm{E}_{-1}$, par conséquent $im(s - id) = \mathrm{E}_{-1}$.
8. D'après le théorème du rang (comme à la question 3)

$$\dim(\ker(s - id)) + \dim\big(im(s - id)\big) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow \dim(E_1) + \dim(E_{-1}) = 4$$

   D'après la question 5 : $E_1 \cap E_{-1} = \{0_E\}$

   Par conséquent : $E_1 \oplus E_{-1} = E$
9. $E_1 \oplus E_{-1} = E$ par suite (u_1, u_2, v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} s(u_1) & s(u_2) & s(v_1) & s(v_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} \end{array}$$