Examen final du 14 mai 2019 de 10h à 12h

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaitre sur la copie. Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont strictement interdits.

Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené.e à prendre.

Exercice 1. 2,5 points

Soit $u : E \to F$ une application linéaire avec $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = q$ avec $p \geq q$.
Montrer que $\dim(\ker(u)) \geq p - q$.

Exercice 2. 4,5 points

1. Trouver toutes les solutions de l'équation $y'' + 9y = 0$.
2. Soit $y'' + 9y = \sin(3x)$. Trouver une solution particulière de cette équation de la forme $y_P = x(A\cos(3x) + B\sin(3x))$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.
3. Trouver une solution particulière de l'équation $y'' + 9y = xe^{3x}$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + 9y = \sin(3x) + xe^{3x}$.
5. Montrer que le système $y'' + 9y = \sin(3x) + xe^{3x}$ avec $y'(0) = y(0) = 0$ admet une unique solution que l'on déterminera.

Exercice 3. 6,5 points

Soit f la fonction définie pour $x < \ln(2)$ par :

$$f(x) = \int_0^x e^t \ln(1 - 5e^{-t} + 6e^{-2t})\, dt$$

On admettra sans démonstration que pour tout $t < \ln(2)$ on a $1 - 5e^{-t} + 6e^{-2t} > 0$ et que la fonction f est bien définie pour tout $x < \ln(2)$.

1. Calculer $\int \frac{5y-12}{y^2-5y+6}\, dy$
2. A l'aide du changement de variable $y = e^t$, puis d'une intégration par partie, calculer $f(x)$.
3. A l'aide de la formule de Taylor-Young donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x)$.
Cette question est indépendante de la première et de la seconde question.

Exercice 4. 10,5 points

Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini dans la base canonique $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ par sa matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On note id l'identité de $\mathbb{R}^4$, $E_1 = \ker(s - id)$ et $E_{-1} = \ker(s + id)$

1. Calculer A^2, en déduire s^2, c'est-à-dire $s \circ s$.
2. Déterminer une base (u_1, u_2) de E_1.

3. En déduire $\dim\big(im(s - id)\big)$.
4. Montrer que $im(s - id) \subset E_{-1}$. Puis que $\dim(E_{-1}) \geq 2$
5. Montrer que $E_1 \cap E_{-1} = \{0_E\}$.
6. A l'aide de la formule de Grassmann montrer que $\dim(E_{-1}) \leq 2$. Puis que $\dim(E_{-1}) = 2$.
   Si vous n'arrivez pas à faire cette question, il est toujours possible de trouver une base (v_1, v_2) de E_{-1}.
7. Comparer $im(s - id)$ et E_{-1}.
8. Montrer que $E_1 \oplus E_{-1} = \mathbb{R}^4$.
9. Soit (u_1, u_2) une base de E_1 et (v_1, v_2) une base de E_{-1}, montrer que (u_1, u_2, v_1, v_2) est une base $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice de s dans cette base.