Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre de printemps 2017-2018
Fondamentaux des mathématiques 2

Examen final du 16 mai 2018-durée 2h

Attention à la rédaction, pas de téléphone portable ni de calculatrice, on ne sort que une heure après le début de l'examen.

Exercice 1.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle f définie par :
$$f(t)=\frac{2t}{(t-1)^2(t+1)}$$
2. Pour $x>0$. Donner une primitive de
$$x\to\frac{1}{x\sqrt{x+1}-x}$$
Indication : on pourra se servir de la question 1 et du changement de variable $t=\sqrt{x+1}$

Correction exercice 1

1. Il existe trois réels a, b et c tels que :
$$\frac{2t}{(t-1)^2(t+1)}=\frac{a}{t-1}+\frac{b}{(t-1)^2}+\frac{c}{t+1}$$
On multiplie par $(t-1)^2$, puis $t=1$
$$b=\left[\frac{2t}{t+1}\right]_{t=1}=1$$
On multiplie par $t+1$, puis $t=-1$
$$c=\left[\frac{2t}{(t-1)^2}\right]_{t=-1}=-\frac{1}{2}$$
On multiplie par t, puis $t\to+\infty$
$$0=a+c\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$
$$\frac{2t}{(t-1)^2(t+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{-\frac{1}{2}}{t+1}$$
2. On pose
$$F(x)=\int\frac{1}{x\sqrt{x+1}-x}dx$$
$$t=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x=t^2-1\Rightarrow dx=2tdt$$
$$\frac{1}{x\sqrt{x+1}-x}=\frac{1}{(t^2-1)t-(t^2-1)}=\frac{1}{(t^2-1)(t-1)}=\frac{1}{(t+1)(t-1)(t-1)}=\frac{1}{(t+1)(t-1)^2}$$
Donc
$$F(x)=\int\frac{2t}{(t+1)(t-1)^2}dt=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{-\frac{1}{2}}{t+1}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2}\ln|t+1|+K, K\in\mathbb{R}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|-\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)+K, K\in\mathbb{R}$$

Exercice 2.

Résoudre l'équation différentielle, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y'' - 3y' + 2y = e^x + e^{-x} \quad (E)$$

Correction exercice 2

L'équation homogène est :

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Son équation caractéristique est : $r^2 - 3r + 2 = 0$, donc les racines sont les réels $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$, sa solution générale est :

$$y = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

D'après le théorème de fractionnement des solutions particulière, si on appelle y_{P_1} une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = e^x$ et y_{P_2} une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$ alors $y_P = y_{P_1} + y_{P_2}$ est une solution particulière de (E).

On cherche y_{P_1} sous la forme $y_{P_1} = Axe^x$ car 1 est racine de l'équation caractéristique.

$$y'_{P_1} = A(x+1)e^x \quad \text{et} \quad y''_{P_1} = A(x+2)e^x$$

$$y''_{P_1} - 3y'_{P_1} + 2y_{P_1} = e^x \Leftrightarrow A(x+2)e^x - 3A(x+1)e^x + 2Axe^x = e^x \Leftrightarrow A = -1$$

Donc $y_{P_1} = -xe^x$

On cherche y_{P_2} sous la forme $y_{P_2} = Ae^{-x}$ car -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique.

$$y'_{P_2} = -Ae^{-x} \quad \text{et} \quad y''_{P_2} = Ae^{-x}$$

$$y''_{P_2} - 3y'_{P_2} + 2y_{P_2} = e^{-x} \Leftrightarrow Ae^{-x} + 3Ae^{-x} + 2Ae^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow 6A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{6}$$

Donc $y_{P_2} = \frac{1}{6}e^{-x}$ et alors $y_P = -xe^x + \frac{1}{6}e^{-x}$. La solution générale de (E) est :

$$y = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} - xe^x + \frac{1}{6}e^{-x}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice 3.

1 . Donner le développement limité à l'ordre 2, en 0 de $X \to \sqrt{X+1}$.

2 . Donner le développement limité à l'ordre 4, en 0, de $x \to \sqrt{\cos(x)}$.

3. En déduire

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - 1 + \frac{x^2}{4}}{x\sin(x) - x^2}$$

Correction exercice 3

1.

$$\sqrt{1+X} = (1+X)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{X^2}{2!} + o(X^2) = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + o(X^2)$$

2.

$$\sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = \sqrt{1+X} = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + o(X^2)$$

Avec

$$X = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$X^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$o(X^2) = o(x^4)$$

Donc

$$\sqrt{\cos(x)} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) + o(x^4)$$
$$= 1 - \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{32}\right)x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o(x^4)$$

3.

$$\frac{\sqrt{\cos(x)} - 1 + \frac{x^2}{4}}{x\sin(x) - x^2} = \frac{1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{4}}{x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - x^2} = \frac{-\frac{1}{96}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{1}{96}x^4}{-\frac{1}{6}x^4} = \frac{6}{96}$$
$$= \frac{1}{16} \underset{0}{\rightarrow} \frac{1}{16}.$$

Exercice 4.

Soit $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit u l'application linéaire définit par :

$$u(1) = -1 - X - X^2;\ \ u(X) = -2 - X^2 \quad \text{et} \quad u(X^2) = 4 + 2X + 3X^2$$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que : $u(P) = (3a - b - c)X^2 + (2a - c)X + 4a - 2b - c$
3. Déterminer une base (P_1, P_2) de $\ker(u - Id)$.
4. Donner une base P_3 de $\ker(u)$.
5. Montrer que $\beta' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
6. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
7. Montrer que $Im(u) = \ker(u - Id)$
8. Montrer que $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}_2[X]$.
9. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Pourquoi existe-t-il un unique triplet (α, β, γ) de réels tels que $P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$?
10. A l'aide de la question 9, calculer $u(P)$, pour $P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 \in \mathbb{R}_2[X]$, donner une interprétation géométrique de u.

Correction exercice 4

1.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(1) & u(X) & u(X^2) \end{array} & \\ A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

2.

$$u(P) = u(aX^2 + bX + c) = au(X^2) + bu(X) + cu(1)$$
$$= a(4 + 2X + 3X^2) + b(-2 - X^2) + c(-1 - X - X^2)$$
$$= (3a - b - c)X^2 + (2a - c)X + 4a - 2b - c$$

3.

$$P \in \ker(u - id) \Leftrightarrow u(P) - P = 0$$
$$\Leftrightarrow (3a - b - c)X^2 + (2a - c)X + 4a - 2b - c - (aX^2 + bX + c) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2a - b - c)X^2 + (2a - b - c)X + 4a - 2b - 2c = 0 \Leftrightarrow 2a - b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a - b$$

Donc $P = aX^2 + bX + 2a - b = a(X^2 + 2) + b(X - 1)$. On pose $P_1 = X^2 + 2$ et $P_2 = X - 1$

On a $\ker(u - id) = Vect(P_1, P_2)$, autrement dit (P_1, P_2) engendrent $\ker(u - id)$ et d'autre part P_1 et P_2 ne sont pas proportionnels donc ils forment une famille libre, ils s'agit donc d'une base de $\ker(u - id)$.

4.

$$P \in \ker(u) \Leftrightarrow u(P) = 0 \Leftrightarrow (3a-b-c)X^2 + (2a-c)X + 4a - 2b - c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b-c=0 \\ 2a-c=0 \\ 4a-2b-c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b-c=0 \\ c=2a \\ 4a-2b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ c=2a \\ 2a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a \\ c=2a \end{cases}$$

Donc $P = aX^2 + aX + 2a = a(X^2 + X + 2)$, par conséquent $\ker(u) = Vect(P_3)$ où $P_3 = X^2 + X + 2$, et c'est bien sûr une base de $\ker(u)$.

5. (P_1, P_2) est libre et $P_3 \notin \ker(u - id)$ car $u(P_3) = 0 \neq P_3$ donc (P_1, P_2, P_3) est libre, or une famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension 3 est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
6. D'après 3. $u(P_1) - P_1 = 0$ donc $u(P_1) = P_1$ de même $u(P_2) = P_2$ et bien sûr $u(P_3) = 0$, on en déduit que :

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(P_1) & u(P_2) & u(P_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}$$

7. $Im(u) = Vect\big(u(P_1), u(P_2), u(P_3)\big) = Vect(P_1, P_2, 0) = Vect(P_1, P_2) = \ker(u - id)$

   Autre méthode

$$P_1 = X^2 + 2 = -u(X) = u(-X) \Rightarrow P_1 \in Im(u)$$
$$P_2 = X - 1 = u(X) - u(1) = u(X - 1) \Rightarrow P_2 \in Im(u)$$

   Comme (P_1, P_2) est libre et que d'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 \Rightarrow \dim\big(Im(u)\big) = 2$$

   Alors (P_1, P_2) est une base de $Im(u)$ car une famille libre de deux vecteurs dans un espace de dimension deux est une base. Par conséquent :

$$\ker(u - id) = im(u)$$

8. $\dim(\ker(u)) + \dim\big(im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ d'après le théorème du rang.

   Soit $P \in \ker(u) \cap im(u)$, $u(P) = 0$ et $u(P) = P$ car $im(u) = \ker(u - id)$, donc $P = 0$, par conséquent : $\ker(u) \cap Im(u) = \{0\}$ et que l'on a bien

$$\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}_2[X]$$

9. Car (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
10. Dans la base β', $P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$, donc

$$u(P) = u(\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3) = \alpha u(P_1) + \beta u(P_2) + \gamma u(P_3) = \alpha P_1 + \beta P_2$$

   L'application linéaire u est donc la projection sur le plan $Im(u)$ parallèlement à la droite $\ker(u)$.