Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre de printemps 2017-2018
Fondamentaux des mathématiques 2

Examen final du 16 mai 2018-durée 2h

Attention à la rédaction, pas de téléphone portable ni de calculatrice, on ne sort que une heure après le début de l'examen.

Exercice 1.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle f définie par :
$$f(t) = \frac{2t}{(t-1)^2(t+1)}$$
2. Pour $x > 0$. Donner une primitive de
$$x \to \frac{1}{x\sqrt{x+1} - x}$$
Indication : on pourra se servir de la question 1 et du changement de variable $t = \sqrt{x+1}$

Exercice 2.

Résoudre l'équation différentielle, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$y'' - 3y' + 2y = e^x + e^{-x} \quad (E)$$

Exercice 3.

1. Donner le développement limité à l'ordre 2, en 0, de $X \to \sqrt{X+1}$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 4, en 0, de $x \to \sqrt{\cos(x)}$.
3. En déduire
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - 1 + \frac{x^2}{4}}{x\sin(x) - x^2}$$

Exercice 4.

Soit $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit u l'application linéaire définit par :
$$u(1) = -1 - X - X^2; \;\; u(X) = -2 - X^2 \quad \text{et} \quad u(X^2) = 4 + 2X + 3X^2$$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que : $u(P) = (3a - b - c)X^2 + (2a - c)X + 4a - 2b - c$
3. Déterminer une base (P_1, P_2) de $\ker(u - Id)$.
4. Donner une base P_3 de $\ker(u)$.
5. Montrer que $\beta' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
6. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
7. Montrer que $Im(u) = \ker(u - Id)$
8. Montrer que $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}_2[X]$.
9. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Pourquoi existe-t-il un unique triplet (α, β, γ) de réels tels que $P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$?
10. A l'aide de la question 9, calculer $u(P)$, pour $P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 \in \mathbb{R}_2[X]$, donner une interprétation géométrique de u.