Examen final du 10 mai 2017-durée 3h

Le sujet est imprimé sur une page resto-verso. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction. Documents, téléphones portables et calculatrices sont interdits. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1. (6 points)

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$
2. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que $\ker(f) = Vect(a)$, déterminer un vecteur qui convient.
3. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$
   a. Calculer $f(b)$ et $f(c)$
   b. En déduire que $\{b, c\}$ est une base de $Im(f)$.
4. Montrer que $\mathcal{B}' = \{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$
5. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$
6. A-t-on $\ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 2. (4 points)

On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Etant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$f_\alpha(e_1) = e_1 + e_2 + 2e_3$$
$$f_\alpha(e_2) = e_1 + e_2 + \alpha e_3$$
$$f_\alpha(e_3) = e_1 + 2e_3$$

1. Donner la matrice A représentative de f_α dans la base $\mathcal{B}$.
2. Calculer, lorsqu'elle existe, la matrice inverse de la matrice A.
3. Pour quelles valeurs de α, β f_α est-il un isomorphisme ?

Exercice 3. (4 points)

1. Trouver les solutions de l'équation différentielle
$$y'' + y' - 2y = -3e^{2t} + 1$$
2. Exprimer la solution y telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 4. (4 points)

1. A l'aide du changement de variable $u = \ln(x)$, d'intégrations par partie bien choisies, calculer
$$\int_1^e (\ln(x))^2 dx$$
2. Donner le domaine de définition et déterminer les primitives de $x \longmapsto \frac{x^3}{x^2+2x+2}$.

Exercice 5. (4 points)

Soit h l'application définie par

$$h(x) = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}\ln(1+x)$$

1. Donner le domaine de définition de h.
2. Donner le développement limité à l'ordre 2 de $\frac{x+1}{x^2+2x+2}$ au voisinage de 0 et en déduire le développement limité de $h(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
3. Donner l'équation de la tangente au graphe de h au point $(0,0)$, et précisez la position de la tangente par rapport à sa tangente en ce point.

Exercice 6. (3 points)

On rappelle que pour tout $a \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

1. Montrer que $0 < \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{4}$
2. Prouver que $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$.
3.

Exercice 7. (3 points)

Soit α, β des réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\alpha + k\beta}$$

Montrer que S_n est convergente et calculer sa limite (on pourra faire apparaitre une somme de Riemann).