Examen final (2h)
Mercredi 20 décembre 2017

Exercice 1.

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{2}{n+1}$$

1. Calculer u_1, u_2, v_1 et v_2 (on notera chaque résultat sous la forme d'une fraction irréductible).
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n$ en fonction de n. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
4. Montrer (par un argument rigoureux) que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et convergent vers la même limite.

Exercice 2.

On considère le polynôme $A = X^3 - X^2 + 2$

1. Montrer que -1 est une racine de A.
2. Quel est son ordre de multiplicité ? Justifier la réponse.
3. Factoriser A en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$.
2. A l'aide des formules d'Euler, en déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:
$$1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad 1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$
3. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta \neq (2k+1)\pi$, alors $\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = -i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
4. Etant donné $\theta \in \mathbb{R}$, on s'intéresse aux solutions de l'équation $\frac{i-z}{i+z} = e^{i\theta}$.
   a. Montrer que s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = (2k+1)\pi$ alors $e^{i\theta} = -1$.
   b. Montrer que l'équation $\frac{i-z}{i+z} = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.
   c. Montrer, à l'aide de la question 3. que si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ alors l'équation $\frac{i-z}{i+z} = e^{i\theta}$ admet une unique solution et que celle-ci est réelle.

Exercice 4.

On considère l'application $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{ch}(x+1)} - \sqrt{\operatorname{ch}(x)}$$

N.B. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1. Justifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2.
   a. Montrer que $f(0) = -f(-1)$ et que ces réels ne sont pas nuls.

b. En déduire (en utilisant un argument rigoureux) que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $]-1,0[$.

3. On considère l'application $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{\mathrm{ch}(x)}$.
   a. Quelle relation simple lie f et g ?
   b. Rappeler le théorème de dérivation composées.
   On admet qu'il s'applique à g, qui est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Calculer sa dérivée g'.
   c. Montrer que pour tour $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in]x, x+1[$ tel que :
   $$g(x+1) - g(x) = \frac{\mathrm{sh}(y)}{2\sqrt{\mathrm{ch}(y)}}$$
   d. Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,
   $$\frac{\mathrm{sh}(y)}{2\sqrt{\mathrm{ch}(y)}} = \frac{e^{\frac{y}{2}}}{2\sqrt{2}} \frac{1 - e^{-2y}}{\sqrt{1 + e^{-2y}}}$$
   e. BONUS : Déduire $\lim\limits_{x+\infty} f(x)$ des questions 3.a., c. et d. en argumentant rigoureusement.