Examen final (2h)
Mercredi 20 décembre 2017

Exercice 1.

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{2}{n+1}$$

1. Calculer u_1, u_2, v_1 et v_2 (on notera chaque résultat sous la forme d'une fraction irréductible).
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n$ en fonction de n. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
4. Montrer (par un argument rigoureux) que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et convergent vers la même limite.

Correction exercice 1

1.

$$u_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = 1; \quad u_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}; \ v_1 = u_1 + \frac{2}{2} = 2; \quad v_2 = u_2 + \frac{2}{3} = \frac{5}{4} + \frac{2}{3} = \frac{23}{12}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} > u_n$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (et même strictement croissante).

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{2}{n+2} - \left(u_n + \frac{2}{n+1}\right) = u_{n+1} - u_n + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} = \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} = \frac{n+2+2(n+1)^2 - 2(n+1)(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} \\ &= \frac{n+2+2n^2+4n+2-2(n^2+3n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{-n}{(n+1)^2(n+2)} < 0 \end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

4. Comme $v_n - u_n \to 0$ et d'après le théorème des suites adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite.

Exercice 2.

On considère le polynôme $A = X^3 - X^2 + 2$

1. Montrer que -1 est une racine de A.
2. Quel est son ordre de multiplicité ? Justifier la réponse.
3. Factoriser A en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$.

Correction exercice 2

1.

$$A(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$$

Donc -1 est une racine de A.

2.
$$A' = 3X^2 - 2X \quad \text{et} \quad A'(-1) = 3 + 2 = 5 \neq 0$$
Donc -1 est une racine simple de A.

3. On peut mettre $X + 1$ en facteur

$$\begin{array}{l|l}
X^3 - X^2 \qquad\quad + 2 & X + 1 \\ \cline{2-2}
X^3 + X^2 & X^2 - 2X + 2 \\ \hline
\quad -2X^2 \qquad\quad + 2 & \\ \hline
\quad -2X^2 - 2X & \\
\qquad\qquad 2X + 2 & \\ \hline
\qquad\qquad 2X + 2 & \\
\qquad\qquad 2X + 2 & \\ \hline
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Par conséquent $A = (X + 1)(X^2 - 2X + 2)$ et c'est la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ car son discriminant vaut $\Delta = -4 < 0$

Après un calcul élémentaire les racines complexes de $X^2 - 2X + 2 = 0$ sont $X_1 = 1 - i$ et $X_2 = 1 + i$, donc la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est :
$$A = (X + 1)\big(X - (1 - i)\big)\big(X - (1 + i)\big)$$

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$.
2. A l'aide des formules d'Euler, en déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:
$$1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad 1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$
3. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta \neq (2k + 1)\pi$, alors $\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = -i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
4. Etant donné $\theta \in \mathbb{R}$, on s'intéresse aux solutions de l'équation $\frac{i-z}{i+z} = e^{i\theta}$.
   a. Montrer que s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = (2k + 1)\pi$ alors $e^{i\theta} = -1$.
   b. Montrer que l'équation $\frac{i-z}{i+z} = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.
   c. Montrer, à l'aide de la question 3. que si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{(2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ alors l'équation $\frac{i-z}{i+z} = e^{i\theta}$ admet une unique solution et que celle-ci est réelle.

Correction exercice 3

1.
$$e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)} = 1 - e^{i\theta}$$

2.
$$1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = -e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$
$$1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

3. $\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$ est bien définie car pour $\theta \neq (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, $e^{i\theta} \neq -1$.

$$\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}=-\frac{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}=-i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

4.

a. $e^{i\theta}=e^{i(2k+1)\pi}=e^{2ik\pi+i\pi}=e^{2ik\pi}e^{i\pi}=1\times(-1)=-1$

b. Soit $z\in\mathbb{C}$ une solution de $\frac{i-z}{i+z}=-1$

$$\frac{i-z}{i+z}=-1\Leftrightarrow i-z=-(i+z)\Leftrightarrow i-z=-i-z\Leftrightarrow i=-i$$

Ce n'est pas possible, donc il n'y a pas de solution.

c. Pour tout $z\in\mathbb{C}$

$$\frac{i-z}{i+z}=e^{i\theta}\Leftrightarrow i-z=e^{i\theta}(i+z)\Leftrightarrow i-z=ie^{i\theta}+ze^{i\theta}\Leftrightarrow i-ie^{i\theta}=z+ze^{i\theta}\Leftrightarrow i\left(1-e^{i\theta}\right)$$
$$=z\left(1+e^{i\theta}\right)\Leftrightarrow z=i\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$$

Car $e^{i\theta}\neq-1$ puisque $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

La solution est donc $z=i\left(-i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\in\mathbb{R}$.

Exercice 4.

On considère l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=\sqrt{\operatorname{ch}(x+1)}-\sqrt{\operatorname{ch}(x)}$$

N.B. On rappelle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1. Justifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2.
   a. Montrer que $f(0)=-f(-1)$ et que ces réels ne sont pas nuls.

   b. En déduire (en utilisant un argument rigoureux) que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $]-1,0[$.
3. On considère l'application $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $g(x)=\sqrt{\operatorname{ch}(x)}$.

   a. Quelle relation simple lie f et g ?

   b. Rappeler le théorème de dérivation composées.
   On admet qu'il s'applique à g, qui est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Calculer sa dérivée g'.

   c. Montrer que pour tour $x\in\mathbb{R}$, il existe $y\in]x,x+1[$ tel que :
   $$g(x+1)-g(x)=\frac{\operatorname{sh}(y)}{2\sqrt{\operatorname{ch}(y)}}$$

   d. Montrer que, pour tout $y\in\mathbb{R}$,
   $$\frac{\operatorname{sh}(y)}{2\sqrt{\operatorname{ch}(y)}}=\frac{e^{\frac{y}{2}}}{2\sqrt{2}}\frac{1-e^{-2y}}{\sqrt{1+e^{-2y}}}$$

   e. BONUS : Déduire $\lim\limits_{x+\infty}f(x)$ des questions 3.a., c. et d. en argumentant rigoureusement.

Correction exercice 4

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x)\geq 1>0$, donc $\operatorname{ch}(x+1)\geq 1>0$ et la fonction $t\to\sqrt{t}$ est définie, et continue pour tout $t\geq 0$ donc f est définie et continue pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2.

a. $f(0)=\sqrt{\mathrm{ch}(1)}-\sqrt{\mathrm{ch}(0)}$ et $f(-1)=\sqrt{\mathrm{ch}(0)}-\sqrt{\mathrm{ch}(-1)}=\sqrt{\mathrm{ch}(0)}-\sqrt{\mathrm{ch}(1)}=-f(0)$
D'autre part

$$f(0)=\sqrt{\mathrm{ch}(1)}-\sqrt{\mathrm{ch}(0)}=\sqrt{\frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{2}}-\sqrt{1}\geq\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}-1>\sqrt{\frac{2}{2}}-1\geq 1-1=0$$

Donc $f(0)>0$. Et par conséquent $f(-1)<0$.

b. Comme f est continue sur $[x,x+1]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c\in\,]x,x+1[$ tel que : $f(c)=0$.

3.

a. $f(x)=g(x+1)-g(x)$.

b. Soit $g=h\circ u$ alors $g'=h'\circ u\times u'$, on l'applique à $h: x\to\sqrt{x}$ et $u=\mathrm{ch}$

$$g'(x)=\frac{\mathrm{sh}(x)}{2\sqrt{\mathrm{ch}(x)}}$$

c. D'après le théorème des accroissements finis, puisque g est continue sur $[x,x+1]$ et dérivable sur $]x,x+1[$ (car g est dérivable sur $\mathbb{R}$), il existe $y\in\,]x,x+1[$ tel que :

$$g(x+1)-g(x)=g'(y)(x+1-x)=\frac{\mathrm{sh}(y)}{2\sqrt{\mathrm{ch}(y)}}$$

d.

$$\frac{\mathrm{sh}(y)}{2\sqrt{\mathrm{ch}(y)}}=\frac{\frac{e^y-e^{-y}}{2}}{2\sqrt{\frac{e^y+e^{-y}}{2}}}=\frac{e^y\frac{1-e^{-2y}}{2}}{2\sqrt{e^y\frac{1+e^{-2y}}{2}}}=\frac{e^y\frac{1-e^{-2y}}{2}}{2\frac{\sqrt{e^y}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+e^{-2y}}}=\frac{e^y\frac{1-e^{-2y}}{2}}{\sqrt{2}e^{\frac{y}{2}}\sqrt{1+e^{-2y}}}$$

$$=\frac{e^{y-\frac{y}{2}}(1-e^{-2y})}{2\sqrt{2}\sqrt{1+e^{-2y}}}=\frac{e^{\frac{y}{2}}}{2\sqrt{2}}\frac{1-e^{-2y}}{\sqrt{1+e^{-2y}}}$$

e. D'après la question c. on déduit de $x<y<x+1$, que si $x\to+\infty$ alors $y\to+\infty$ aussi

$$f(x)=g(x+1)-g(x)=\frac{\mathrm{sh}(y)}{2\sqrt{\mathrm{ch}(y)}}=\frac{e^{\frac{y}{2}}}{2\sqrt{2}}\frac{1-e^{-2y}}{\sqrt{1+e^{-2y}}}$$

On a

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1-e^{-2y}}{\sqrt{1+e^{-2y}}}=1$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{\frac{y}{2}}}{2\sqrt{2}}\frac{1-e^{-2y}}{\sqrt{1+e^{-2y}}}=+\infty$$