Université Claude Bernard Lyon 1 UE Fondamentaux des mathématiques 1
Semestre d'automne 2016

Examen final (3h)
Mardi 10 janvier 2017

## Exercice 1. 30 minutes

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés.

1. Montrer que
$$\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}e^{ip\theta} = \frac{e^{i\theta} - t^n e^{i(n+1)\theta}}{1 - te^{i\theta}}$$
2. Montrer que $(1 - te^{i\theta})(1 - te^{-i\theta}) = t^2 - 2t\cos(\theta) + 1$.
3. On pose : $S_n(t) = \sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\sin(p\theta)$. Déduire de ce qui précède que
$$S_n(t) = \frac{\sin(\theta) - t^n \sin\big((n+1)\theta\big) + t^{n+1}\sin(n\theta)}{t^2 - 2t\cos(\theta) + 1}$$
4. Quelle est la limite de $t^n \sin(n\theta)$ quand $n \to +\infty$ ?
5. En déduire la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty} S_n(t)$$

## Exercice 2. 15 minutes

Soit $A$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 5 tel que le reste de sa division euclidienne par $(X+1)^3$ est $-5$ et le reste de sa division euclidienne par $(X-1)^3$ est $11$.

1. Montrer que $A + 5$ admet $-1$ comme racine triple.
2. Montrer que $A - 11$ admet 1 comme racine triple.
3. En déduire que $-1$ et 1 sont racines doubles de $A'$, le polynôme dérivée de $A$
4. En déduire que $A'$ s'écrit sous la forme $A' = a(X^4 - 2X^2 + 1)$, où $a \in \mathbb{R}$.
5. Montrer qu'alors que $A$ s'écrit sous la forme $A = a\left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{2}{3}X^3 + X\right) + b$, où $b \in \mathbb{R}$.
6. Calculer $a$ et $b$ et en déduire le polynôme $A$.

## Exercice 3. 30 minutes

1. Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $h$ une application de $E$ dans $F$. On considère deux sous-ensembles quelconques $A, B \subset E$.
   a. Montrer que si $A \subset B$ alors $h(A) \subset h(B)$.
   b. Montrer que $h(A \cap B) \subset h(A) \cap h(B)$.
   c. Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que l'inclusion précédente peut être stricte, c'est-à-dire que l'on n'a pas forcément égalité
2. 
   a. Soit $\varphi$ une application continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On rappelle que sous cette hypothèse de continuité, on a l'équivalence
   $$\varphi \text{ est injective} \Leftrightarrow \varphi \text{ est strictement monotone}$$
      i. Montrer, que si $\varphi \circ \varphi$ est injective, alors $\varphi$ est injective (Indication : on pourra montrer la contraposée).
      ii. Montrer que si $\varphi$ est monotone alors $\varphi \circ \varphi$ est nécessairement croissante.
      iii. Montrer que $\varphi \circ \varphi$ ne peut être strictement décroissante (Indication : on pourra le montrer par l'absurde).
   b. Soit $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) > 0$.

L'application $\varphi$ est-elle nécessairement injective (justifier votre réponse) ? Est-elle nécessairement surjective (justifier votre réponse) ?

Exercice 4. 15 minutes

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation

$$2520x - 3960y = 6480$$

Exercice 5. 20 minutes

On considère une fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g'(x)| < 1$$

On définit $k = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g'(x)|$.

1. Supposons qu'il existe $c, c' \in \mathbb{R}$ tel que $g(c) = c$ et $g(c') = c'$.
   a. Montrer que $|g(c) - g(c')| \leq k|c - c'|$
   b. En déduire que $c = c'$.
2. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence suivante :
$$\begin{cases} x_0 \text{ donné dans } \mathbb{R} \\ x_{n+1} = g(x_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|$.
   b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n|x_1 - x_0|$.
   c. Montrer que pour tout $m \geq n \geq 0$ : $|x_m - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$.
   d. On admet que cela entraine que la suite converge vers un réel $l$. Montrer que $g(l) = l$ et qu'il n'existe aucun autre réel $l'$ tel que $g(l') = l'$.

Exercice 6. 30 minutes

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \cos(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'objectif de cette question est de montrer rigoureusement que cette suite diverge.
   a. Rappeler l'expression de $\cos(a + b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.
   b. Montrer que pour tout $n$, $\cos(n + 1) - \cos(n - 1) = -2\sin(n)\ \sin(1)$. En déduire que si la suite $(u_n)$ converge, alors la suite $(\sin(n))$ tend vers 0.
   c. En développant $\cos(n + 1)$, montrer que si $(u_n)$ converge, alors elle converge vers 0.
   d. Conclure, à l'aide de la formule $\cos^2 + \sin^2 = 1$ que la suite $(u_n)$ diverge.
2. Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $(w_n)$ la suite définie par $w_0$, donné, et $w_{n+1} = aw_n + b$ pour tout $n \geq 0$.
   a. Donner une expression du terme général de $w_n$ dans le cas où $a = 1$, puis dans le cas où $b = 0$.
   b. On suppose que $a \neq 1$. Montrer par récurrence que :
$$w_n = a^n\left(w_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$
   c. Pour quelles valeurs de $a, b$ et $w_0$ la suite $(w_n)$ converge-t-elle ? Préciser dans ce cas, la limite.

Exercice 7. 40 minutes

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

1. Montrer que $\mathcal{D}_f = ]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$.
2. Montrer que $\lim_{x\to 0} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$. En déduire que $f$ se prolonge par continuité en 0, par une valeur à préciser.
3. 

   a. Montrer que $\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$
   b. En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
4. Calculer $\lim_{x \to (-1)^-} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
5.
   a. Montrer que :
$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \qquad f'(x) = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) f(x)$$
   b. Etudier les variations de la fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathcal{D}_f$ par :
$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$
   c. En déduire le signe de $f'$ et les variations de $f$.
   d. Calculer
$$\lim_{x \to 0^+} f'(x)$$
   e. Dessiner un graphe assez précis de $f$.