Contrôle final automne 2021

Exercice 1.

1. Soient A et B deux polynômes à coefficients réels avec $B \neq 0$. Enoncer le théorème de division euclidienne de A par B.
2. Dans cette question $A = (X-3)^{12} + (X-2)^6 - 2$ et $B = (X-3)(X-2)$. Soit R le reste de la division de A par B.
   a. Justifier que R est de la forme $R = aX + b$, avec a et b dans $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer $R(2)$ et $R(3)$, en déduire une expression des coefficients a et b de $\mathbb{R}$.
3. On revient à la situation générale de la première question et on note R le reste de la division euclidienne de A par B.
   Soit α un réel. Montrer que $A(\alpha) = B(\alpha) = 0$ si et seulement si $B(\alpha) = R(\alpha) = 0$.
4. Soit $p \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}$. On suppose maintenant que $A = X^3 + pX + q$.
   a. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par A' (son polynôme dérivé).
   b. On suppose que α est racine au moins double de A. Montrer que $\alpha = -\frac{3q}{2p}$.
   c. En déduire que A admet une racine au moins double si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Correction exercice 1

1. Il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ et un unique $R \in \mathbb{R}[X]$ avec $d°R < d°B$ tels que
$$A = BQ + R$$
2.
   a. $d°B = 2$ donc $d°R \leq 1$, il existe donc deux réels a et b tels que $R = aX + b$.
   b.
$$\begin{cases} A(2) = 1 - 2 = -1 \\ A(3) = 1 - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -1 \\ 3a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$
   Après quelques calculs pas bien compliqués.
3. On rappelle la question 1, $A = BQ + R$
$$\begin{cases} A(\alpha) = 0 \\ B(\alpha) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(\alpha)Q(\alpha) + R(\alpha) = 0 \\ B(\alpha) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R(\alpha) = 0 \\ B(\alpha) = 0 \end{cases}$$
   Remarque : on pouvait aussi procéder par double implication.
4.
   a. $A' = 3X^2 + p$

$X^3 \quad + pX + q$	$3X^2 + p$
$X^3 \quad + \frac{p}{3}X$	$\frac{1}{3}X$
$\frac{2p}{3}X + q$	

   On a donc $A = A'Q + R$ avec $d°R < d°A' = 2$ et
$$Q = \frac{1}{3}X \quad \text{et} \quad R = \frac{2p}{3}X + q$$
   b. Si α est au moins racine double de A alors $A(\alpha) = A'(\alpha) = 0$
   D'après la question 4.a. $R(\alpha) = 0$ autrement dit $\alpha = -\frac{3q}{2p}$.
   c. Si α est une racine double de A alors d'après 4.b.
$$\begin{cases} A(\alpha) = 0 \\ A'(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(\alpha) = 0 \\ R(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^3 + p\alpha + q = 0 \\ \alpha = -\dfrac{3q}{2p} \end{cases} \Rightarrow\Rightarrow \begin{cases} \left(-\dfrac{3q}{2p}\right)^3 + p\left(-\dfrac{3q}{2p}\right) + q = 0 \\ \alpha = -\dfrac{3q}{2p} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \left(-\frac{3q}{2p}\right)^3 + p\left(-\frac{3q}{2p}\right) + q = 0 \Rightarrow -\frac{27q^3}{8p^3} - \frac{3}{2}q + q = 0 \Rightarrow -\frac{27q^3}{8p^3} - \frac{1}{2}q = 0$$
$$\Rightarrow \frac{27q^3}{8p^3} + \frac{1}{2}q = 0 \Rightarrow \frac{27q^2}{4p^3} + 1 = 0$$
   Car $p \neq 0$

Finalement

$$\begin{cases} A(\alpha) = 0 \\ A'(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow 27q^2 + 4p^3 = 0$$

Réciproque

On suppose que $27q^2 + 4p^3 = 0$ et il faut donc trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $A(\alpha) = A'(\alpha) = 0$, le seul candidat possible est d'après 4.b. $\alpha = -\frac{3q}{2p}$

D'après la question 3. avec $B = A'$, $A(\alpha) = A'(\alpha) = 0$ si et seulement si $A'(\alpha) = R(\alpha) = 0$

$$R(\alpha) = \frac{2p}{3}\alpha + q = \frac{2p}{3}\left(-\frac{3q}{2p}\right) + q = 0$$

$$A'(\alpha) = 3\alpha^2 + p = 3\left(-\frac{3q}{2p}\right)^2 + p = \frac{27q^2}{4p^2} + p = \frac{27q^2 + 4p^3}{4p^2} = 0$$

Donc A admet une racine au moins double $\alpha = -\frac{3q}{2p}$.

L'équivalence est bien montrée.

Exercice 2.

1. Calculer $pgcd(741,351)$ et trouver des coefficients de Bézout associé aux entiers 741 et 351.
2. Donner toutes les solutions du système de congruence

$$x \equiv 7 \mod(19) \qquad \text{et} \qquad x \equiv 13 \mod(25)$$

Correction exercice 2

1.

$$741 = 2 \times 351 + 39$$
$$351 = 9 \times 39 + 0$$

Donc une identité de Bézout entre 751 et 341 est

$$39 = 741 - 2 \times 351$$

2. On cherche les solutions de (S)

$$(S)\begin{cases} x \equiv 7 \mod(19) \\ x \equiv 13 \mod(25) \end{cases}$$

La méthode usuelle est de chercher une solution particulière puis d'utiliser le théorème des restes chinois. Pour une solution particulière.

Première méthode :

On voit que $n_0 = -12$ est une solution particulière, en effet

$$7 \equiv -12 + 19 \Rightarrow \mod(19) \equiv 7 \mod(19)$$

et

$$13 \equiv -12 + 25 \Rightarrow \mod(25) \equiv 13 \mod(25)$$

Deuxième méthode

On cherche une équation de Bézout entre 19 et 25

$$25 = 1 \times 19 + 6$$
$$19 = 3 \times 6 + 1$$

Donc

$$1 = 19 - 3 \times 6 = 19 - 3 \times (25 - 1 \times 19) = -3 \times 25 + 4 \times 19 \quad (*)$$

On en déduit que $n_0 = 7 \times (-3) \times 25 + 13 \times 4 \times 19 = 463$ est congru à 7 modulo 19 et à 13 modulo 25.

Cela fait partie du cours, mais si vous n'êtes pas bien convaincu

$$n_0 = 7 \times (-3) \times 25 + 13 \times 4 \times 19 \equiv 7 \times (-3) \times 25 \mod(19) \equiv 7 \times (1 - 4 \times 19) \mod(19)$$

D'après $(*)$

Puis

$$n_0 \equiv 7 \times (1 - 4 \times 19) \mod(19) \equiv 7 - 7 \times 4 \times 19 \mod(19) \equiv 7 \mod(19)$$

De même

$$n_0 = 7 \times (-3) \times 25 + 13 \times 4 \times 19 \equiv 13 \times 4 \times 19 \mod(25) \equiv 13 \times (1 - (-3) \times 25) \mod(25)$$

D'après $(*)$

Puis

$$n_0 \equiv 13 \times (1-(-3)\times 25) \bmod(25) \equiv 13 - 13 \times (1-(-3)\times 25) \bmod(25) \equiv 13 \quad \bmod(25)$$

L'ensemble des solutions est

Pour la première solution

$$n \equiv -12 \quad \bmod(19 \times 25) \equiv -12 \ \bmod(475)$$

Pour la deuxième solution

$$n \equiv 463 \quad \bmod(19 \times 25) \equiv 463 \ \bmod(475) \equiv 463 - 475 \ \bmod(475) \equiv -12 \ \bmod(475)$$

Ce qui montre qu'il s'agit du même ensemble de solution

Exercice 3.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i = 0$
2. Donner l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie $\left|\frac{z-1}{z-4}\right| = 2$

Correction exercice 3

1.

$$\Delta = (1-3i)^2 - 4(-4-3i) = 1 - 6i - 9 + 16 + 12i = 8 + 6i = 9 + 6i - 1 = (3+i)^2$$

Sinon on cherche $\delta = a + ib$, a, b réels tels que $(a+ib)^2 = 8 + 6i$

Ensuite méthodes classiques.

Les deux solutions sont

$$z_1 = \frac{-(1-3i)-(3+i)}{2} = -2 + i \ \text{ et } \ z_1 = \frac{-(1-3i)+(3+i)}{2} = 1 + 2i$$

2. On pose $z = x + iy$ avec x, y réels

$$\left|\frac{z-1}{z-4}\right| = 2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 4|z-4|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4((x-4)^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2$$
$$= 4x^2 - 32x + 64 + 4y^2 \Leftrightarrow 0 = 3x^2 - 30x + 3y^2 + 63 \Leftrightarrow x^2 - 10x + y^2 + 21 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-5)^2 - 25 + y^2 + 21 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = 4$$

Il s'agit donc du cercle de centre le point d'affixe 5 et de rayon 2.

Exercice 4.

Soient deux réels a et b tels que $0 < a < b$. On définit deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ en posant $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et pour tout entier n ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1.
   a. Montrer que pour tout $x > 0$ et $y > 0$ on a, $\frac{2xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{2}$.
   b. En déduire que pour tout entier n, on a $u_n \leq v_n$ (on pourra utiliser sans démonstration le fait que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout entier n).
2. Pour tout entier n, on pose $w_n = v_n - u_n$.
   a. Montrer que pour tout entier n, on a $w_{n+1} \leq \frac{w_n}{2}$.
   b. En déduire que la suite (w_n) tend vers 0.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones. En déduire qu'elles convergent vers le même réel l.
4. Déterminer l (Indication : calculer $u_n v_n$).

Correction exercice 4

1.
   a. Pour tout $x > 0$ et $y > 0$

$$\frac{x+y}{2} - \frac{2xy}{x+y} = \frac{(x+y)^2 - 4xy}{2(x+y)} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - 4xy}{2(x+y)} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{2(x+y)} = \frac{(x-y)^2}{2(x+y)} \geq 0$$

Car $x + y > 0$, et bien sûr $(x-y)^2 \geq 0$

Cela entraine que

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{2}$$

b. Comme on admet que pour tout n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, on peut appliquer le a. à u_n et v_n

$$\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \leq \frac{u_n+v_n}{2}$$

Ce qui entraine que $u_{n+1} \leq v_{n+1}$ donc pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$, puis comme $u_0 = a < b = v_0$, on a $u_0 \leq v_0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

2.

a. Première méthode

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} - \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} = \frac{1}{2}\frac{(v_n-u_n)^2}{u_n+v_n} = \frac{1}{2}(v_n-u_n)\frac{v_n-u_n}{v_n+u_n}$$

Or $\frac{v_n-u_n}{v_n+u_n} < 1$, car $v_n + u_n > 0$, $u_n > 0$ et $v_n - u_n > 0$ donc

$$w_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n-u_n) = \frac{1}{2}w_n$$

Seconde méthode

$$\frac{1}{2}w_n - w_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n-u_n) - \frac{u_n+v_n}{2} + \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} = \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}v_n + \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$$

$$= -u_n + \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} = \frac{-u_n(u_n+v_n)+2u_nv_n}{u_n+v_n} = \frac{-u_n^2+u_nv_n}{u_n+v_n} = \frac{u_n(v_n-u_n)}{u_n+v_n}$$

Comme $v_n > u_n$, on $v_n - u_n > 0$, que $u_n > 0$, le numérateur est strictement positif, d'autre part le dénominateur est la somme de deux nombre strictement positifs donc il est strictement positif, par conséquent le quotient est strictement positif et on a

$$\frac{1}{2}w_n > w_{n+1}$$

A chaque fois on démontre un peu plus que ce que demande l'énoncé, puisque l'on trouve une inégalité stricte, mais ce n'est pas bien grave car une inégalité stricte entraine une inégalité large.

b. Par récurrence, on montre que $w_n \leq \frac{w_0}{2^n}$ (H_n) pour tout $n \geq 0$

Initialisation pour $n = 0$, $w_0 = \frac{w_0}{2^0} \leq \frac{w_0}{2^0} = w_0$, c'est vrai.

Hérédité

$$w_{n+1} \leq \frac{1}{2}w_n \leq \frac{1}{2} \times \frac{w_0}{2^n} = \frac{w_0}{2^{n+1}}$$

Ce qui achève la récurrence, donc pour tout $n \geq 0$, $w_n \leq \frac{w_0}{2^n}$

On a donc

$$0 \leq w_n \leq \frac{w_0}{2^n}$$

D'après le théorème des gendarmes w_n tend vers 0.

3.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2v_n}{u_n+v_n} = \frac{v_n+v_n}{u_n+v_n} \geq \frac{u_n+v_n}{u_n+v_n} = 1$$

Car $v_n \geq u_n$ et $u_n + v_n > 0$, puis comme $u_n > 0$ on a $u_{n+1} \geq u_n$ donc (u_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+v_n}{2} - v_n = \frac{u_n+v_n-2v_n}{2} = \frac{u_n-v_n}{2} < 0$$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

D'après le théorème sur la suite adjacente, (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $v_n - u_n$ tend vers 0, les deux suites (u_n) et (v_n) converge vers la même limite l (qui est strictement positive).

4. Pour $n \geq 0$

$$u_{n+1}v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \times \frac{u_n+v_n}{2} = u_nv_n$$

Par une récurrence immédiate, $u_nv_n = u_0v_0 = ab$, on fait tendre n vers l'infini

$$l^2 = ab$$

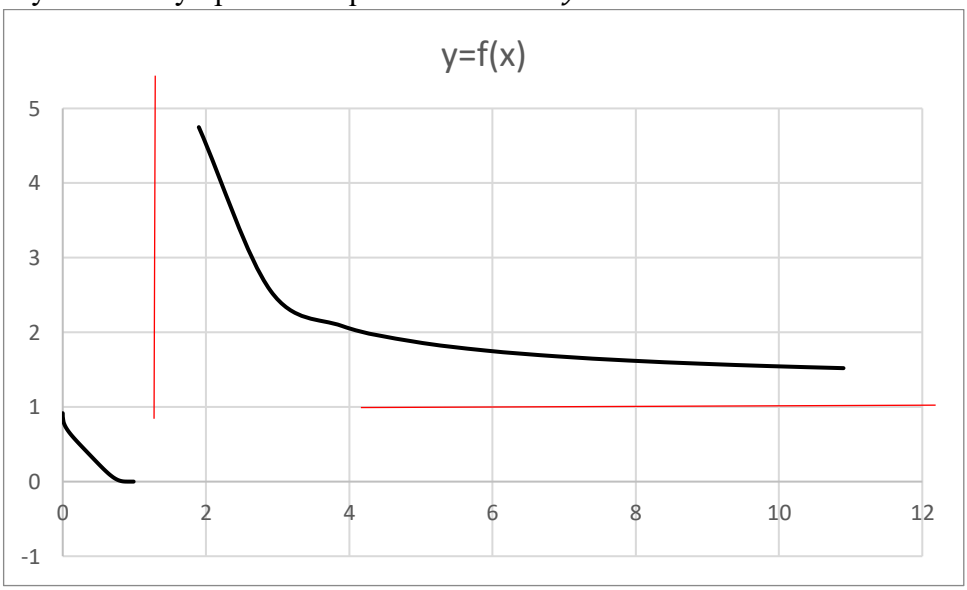
Donc $l = \sqrt{ab}$, car $l \geq 0$. En effet $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ donc leur limite est positive ou nulle.

Exercice 5. On cherche à étudier la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{\ln(x)}}$.

1. Donner le domaine maximal de f, c'est-à-dire le plus grand ensemble de nombre x tel que $f(x)$ est défini, que l'on note D_f.
2. Calculer la fonction dérivée de f et déterminer son signe.
3. Calculer les limites de f aux bords de D_f.
4. Donner la table de variation de f.
5. Tracer le graphe de f, en indiquant ses asymptotes.

Correction exercice 5

1. x doit être strictement positif pour que le ln soit défini et $x \neq 1$ pour que $\ln(x) \neq 0$, donc
$$D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[.$$
2. Pour tout $x \in D_f$
$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} e^{\frac{1}{\ln(x)}} = \frac{-1}{x(\ln(x))^2} e^{\frac{1}{\ln(x)}}$$
Pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) < 0$ et pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f'(x) < 0$.
3. En 0^+, $\ln(x) \to -\infty$ donc $f(x) \to 1$.
En 1^-, $\ln(x) \to 0^-$ donc $f(x) \to 0$.
En 1^+, $\ln(x) \to 0^+$ donc $f(x) \to +\infty$.
En $+\infty$, $\ln(x) \to +\infty$ donc $f(x) \to 1$.
4.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ 1	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	1

5. Il y a deux asymptotes d'équation $x = 1$ et $y = 1$