Session 1 FDM1 automne 2018

Exercice 1.

On considère la polynôme suivant $A = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4$ dans $\mathbb{C}[X]$.

1. Calculer $B = A'/4$, où A' désigne le polynôme dérivée de A.
2. Vérifier par l'algorithme d'Euclide que $pgcd(A, B) = X^2 + 2X + 2$.
3. Montrer en utilisant les deux questions précédentes qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$, de degré 2 tel que : $A = P^2$.
4. En déduire les racines de A dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2.

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence de la façon suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 12 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1. Montrer que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1/12$ dont il faudra préciser également le premier terme.
2. En déduire l'expression de $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite.
6. On pose $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 3u_n + 8v_n$
   a. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
   b. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3.

Soit f la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et plus particulièrement en 1.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et plus particulièrement en 1.
3. Rappeler le théorème des accroissements finis.
4. Utiliser ce théorème pour montrer qu'il existe $c \in]02[$ tel que : $2f'(c) = f(2) - f(0)$
5. Déterminer toutes les valeurs possible de c.

Exercice 4.

1. Exprimer le nombre complexe $z_1 = e^{\frac{17i\pi}{6}}$ sous la forme algébrique $\frac{a}{2} + i\frac{b}{2}$ avec a et b réels à déterminer.
2. On considère le nombre complexe $z_2 = 1 + i$.
   a. Montrer que la racine carrée de partie imaginaire positive est
   $$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$
   b. Donner le module et un argument de z_2 et écrire z_2 sous forme exponentielle.
   c. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.