Contrôle continu 2
Math II analyse
Le 4 Avril 2011
Durée 1 heure

Exercice 1.
Soit f la fonction numérique définie par
$$f(x) = 4\ln(\mathrm{ch}(x)) + \frac{5}{\mathrm{ch}(x)}$$
1°) Déterminer sur quel ensemble f est définie, continue, dérivable ?
2°) Etudier la parité de f et en déduire un intervalle d'étude I.
3°) Calculer la dérivée de f et exprimer les valeurs qui l'annulent sur I de la manière la plus simple possible (Cette expression ne doit pas faire apparaitre de fonction hyperbolique réciproque).
4°) Déterminer les variations de f sur I.
5°) Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x)$, sans préjuger qu'elle existe.
6°) Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) - 4x + 4\ln(2)$, sans préjuger qu'elle existe. Que peut-on en déduire ?
7°) Dresser le tableau de variation et tracer sommairement son graphe.
Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.
Résoudre
$$\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$
Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.
Soit f la fonction définie sur $[-1,0[\cup]0,1]$ par
$$f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$
1°) Montrer que f est continue sur $[-1,0[\cup]0,1]$. Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.
2°) Calculer la dérivée de f sur $]-1,0[\cup]0,1[$.
3°) En déduire une expression plus simple de f sur $[-1,0[$ et sur $]0,1]$.
Allez à : Correction exercice 3

CORRECTION

Correction exercice 1.
1°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geq 1$ donc $x \to 4\ln(\mathrm{ch}(x))$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (par composée de fonctions continues et dérivables) et $x \to \frac{5}{\mathrm{ch}(x)}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
2°)
$$f(-x) = 4\ln(\mathrm{ch}(-x)) + \frac{5}{\mathrm{ch}(-x)} = 4\ln(\mathrm{ch}(x)) + \frac{5}{\mathrm{ch}(x)} = f(x)$$
f est paire, on peut étudier f sur $\mathbb{R}^*$.
3°)
$$f'(x) = 4\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} - \frac{5\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{\mathrm{sh}(x)\,(4\,\mathrm{ch}(x) - 5)}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sh}(x)\,(4\operatorname{ch}(x) - 5) = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0, \begin{cases} \operatorname{sh}(x) = 0 \\ \text{ou} \\ \operatorname{ch}(x) = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \operatorname{argch}\left(\dfrac{5}{4}\right) \end{cases}$$

Soit on connait la formule donnant $\operatorname{argch}(x)$ en fonction du logarithme et

$$\operatorname{argch}\left(\frac{5}{4}\right) = \ln\left(\frac{5}{4} + \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1}\right) = \ln\left(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} - 1}\right) = \ln\left(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{9}{25}}\right) = \ln\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right) = \ln(2)$$

Si on ne la connait pas, on pose $X = e^x$

$$4\operatorname{ch}(x) - 5 \Leftrightarrow \frac{4(e^x + e^{-x})}{2} - 5 = 0 \Leftrightarrow 2\left(X + \frac{1}{X}\right) - 5 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 5X + 2 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 25 - 16 = 9$ et les deux racines sont

$$X_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{5+3}{4} = 2$$

Si on ne cherche que les solutions $x \geq 0$ ($X \geq 1$), il n'y a qu'une solution

$$e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$$

Conclusion : les valeurs positives ou nulle qui annule f' sont $x = 0$ et $x = \ln(2)$.

4°) Si $x > \ln(2)$ alors $\operatorname{ch}(x) > \operatorname{ch}(\ln(2) = \frac{5}{4}$ (car ch est strictement croissante sur $[0, +\infty[$) et donc

$$4\operatorname{ch}(x) - 5 > 0$$

Si $0 \leq x < \ln(2)$ alors $\operatorname{ch}(x) < \operatorname{ch}(\ln(2)) = \frac{5}{4}$ (car ch est strictement croissante sur $[0, +\infty[$) et donc

$$4\operatorname{ch}(x) - 5 < 0$$

Si $x > 0$ sh est strictement positive, on déduit de tout cela le signe de la dérivée et donc les variations de f

Si $0 \leq x < \ln(2)$ f est décroissante.

Si $x \geq \ln(2)$ f est croissante.

5°)

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \ln(\operatorname{ch}(x)) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

6°)

$$f(x) - 4x + 4\ln(2) = 4\ln(\operatorname{ch}(x)) + \frac{5}{\operatorname{ch}(x)} - 4x + 4\ln(2) = 4(\ln(\operatorname{ch}(x) - x + \ln(2)) + \frac{5}{\operatorname{ch}(x)}$$

$$= 4(\ln(\operatorname{ch}(x) - \ln(e^x) + \ln(2)) + \frac{5}{\operatorname{ch}(x)} = 4\ln\left(\frac{2\operatorname{ch}(x)}{e^x}\right) + \frac{5}{\operatorname{ch}(x)}$$

$$= 4\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x}\right) + \frac{5}{\operatorname{ch}(x)} = 4\ln(1 + e^{-2x}) + \frac{5}{\operatorname{ch}(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = \ln(1) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 4x + 4\ln(2)) = 0$$

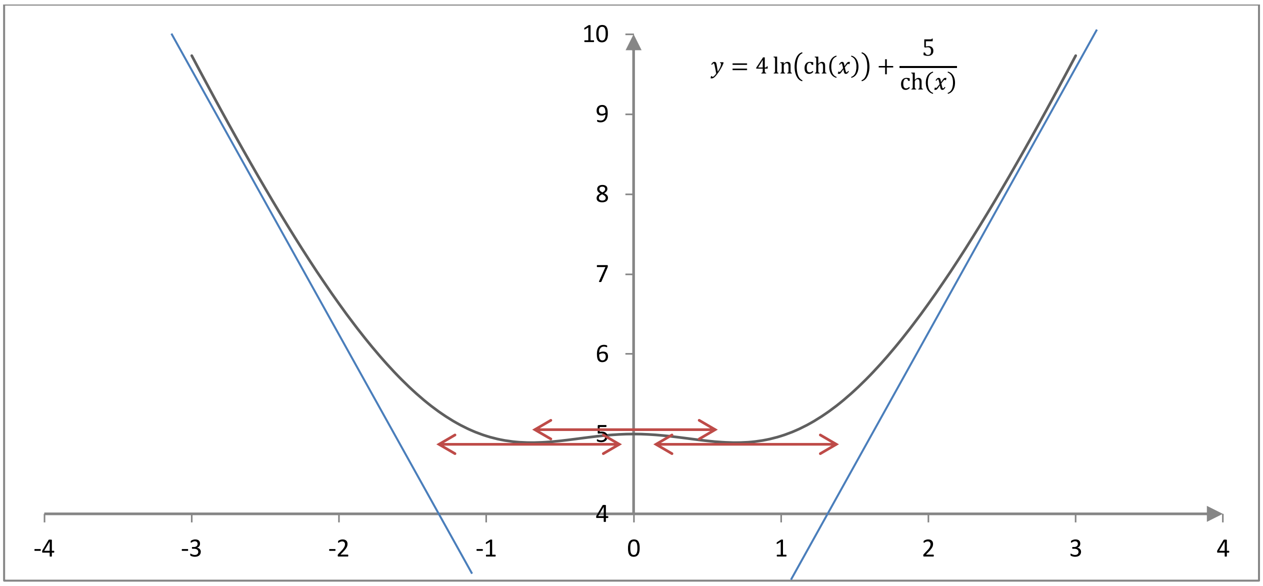
On en déduit que la droite d'équation $y = 4x - 4\ln(2)$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

7°)

$$f(\ln(2)) = \ln(\operatorname{ch}(\ln(2))) + \frac{5}{\operatorname{ch}(\ln(2))} = \ln\left(\frac{5}{4}\right) + 5 \times \frac{4}{5} = \ln\left(\frac{5}{4}\right) + 4$$

$$f(0) = \ln(\operatorname{ch}(0)) + \frac{5}{\operatorname{ch}(0)} = \ln(1) + 5 = 5$$

x	0		$\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\searrow$	$\ln\left(\frac{5}{4}\right) + 4$	$\nearrow$	$+\infty$



Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

$$0<\frac{3}{4}<1 \Leftrightarrow \arccos(0)>\arccos\left(\frac{3}{4}\right)>\arccos(1) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}>\arccos\left(\frac{3}{4}\right)>0 \Rightarrow \pi>2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)>0$$

Donc

$$\arccos(x)=2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow \cos(\arccos(x))=\cos\left(2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow x=2\cos^2\left(\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right)-1=2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{9}{8}-1=\frac{1}{8}$$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1°) $x\to\sqrt{1-x^2}$ est définie et continue sur $]-1,1[$ donc f est définie et continue sur $[-1,0[\cup]0,1]$.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to0^-}f(x)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to0^+}f(x)=+\frac{\pi}{2}$$

Les limites à gauche et à droite de f sont différentes donc f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

2°) On pose, pour tout $x\in]-1,0[\cup]0,1[$

$$u(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$u'(x)=\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}x-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\frac{-x^2-(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2}\times\frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{1+\frac{1-x^2}{x^2}}\times\frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{x^2}{x^2+1-x^2}\times\frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3°) Sur $]-1,0[$, $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ donc il existe K_1 tel que

$$f(x)=\arccos(x)+K_1$$

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\frac{-1}{\sqrt{2}}}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + K_1$$

$$\Rightarrow K_1 = \arctan\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{3\pi}{4} = \arctan(-1) - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

Et alors

$$f(x) = \arccos(x) - \frac{\pi}{2}$$

f est continue en -1, donc

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow \lim_{x\to -1^+}\left(\arccos(x) - \frac{\pi}{2}\right) = f(-1) \Leftrightarrow \left(\arccos(-1) - \frac{\pi}{2}\right) = f(-1)$$

Et donc

$$\forall x \in [-1,0[, f(x) = \arccos(x) - \frac{\pi}{2}$$

Sur $]0,1[$, $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ donc il existe K_2 tel que

$$f(x) = \arccos(x) + K_2$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + K_2 \Rightarrow K_2 = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4} = \arctan(1) - \frac{\pi}{4} = 0$$

Et alors

$$f(x) = \arccos(x)$$

f est continue en 1, donc

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} \arccos(x) = f(1) \Leftrightarrow \arccos(1) = f(1)$$

Et donc

$$\forall x \in]0,1], f(x) = \arccos(x)$$

Allez à : Exercice 3