Contrôle continu commun printemps 2010

Exercice 1.

1°) a) Quel est le domaine de définition de la fonction argsh ?

b) Cette fonction est-elle dérivable en tout point de ce domaine de définition ? Expliquer sommairement comment cela peut-il être justifié ?

c) Pour un x en lequel argsh est dérivable, rappeler l'expression de $\text{argsh}'(x)$ mentionné en cours.

2°) a) Quel est le domaine de définition de la fonction arccos ?

b) Cette fonction est-elle dérivable en tout point de ce domaine de définition ? Expliquer sommairement comment cela peut-il être justifié ?

c) Pour un x en lequel arccos est dérivable, rappeler l'expression de $\arccos'(x)$ mentionné en cours.

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \arcsin(\text{th}(x)) - \arctan(\text{sh}(x))$$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f, puis montrer que f est dérivable sur cet ensemble de définition.

2) Pour tout $x \in D_f$, calculer la valeur $f'(x)$ de la dérivée de f au point x.

3) Que dire de f.

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Dans cet exercice, les informations suivantes pourront être utile :

$$\frac{1}{48} = 0{,}02083333\ldots, \qquad 9 \times 4^5 = 9216 \qquad 9 \times 5^5 = 28125$$

1) Enoncer le théorème de Taylor-Lagrange, on notera $n + 1$ l'ordre du reste dans la formule.

2) Ecrire la conclusion de ce théorème lorsqu'on l'applique à la fonction $f: t \mapsto t^{\frac{1}{3}}$, entre 64 et 65 et avec un reste à l'ordre 2.

3) En déduire un nombre décimal qui approche $\sqrt[3]{65}$ avec une précision inférieur à 10^{-4} près.

4) (Un peu délicate). Sauriez-vous déduire de la question 2 la valeur approchée à 10^{-4} près par défaut de $\sqrt[3]{65}$?

Allez à : Correction exercice 3

CORRECTION

Correction exercice 1.

1) a) L'ensemble de définition de argsh est $\mathbb{R}$.

b) argsh est la bijection réciproque de sh $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, laquelle est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée ne s'annule pas donc argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) $\text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2) a) arccos est définie sur $[-1,1]$.

b) arcsin est la bijection réciproque de cos $: [0,\pi] \to [-1,1]$, laquelle est une fonction dérivable sur $[0,\pi]$ mais dont la dérivée est nulle en 0 et en π, comme $\arccos(-1) = \pi$ et $\arccos(1) = 0$, arccos est dérivable sur $]-1,1[$.

c) $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1) $\text{th}: \mathbb{R} \to]-1,1[$ est dérivable, $\arcsin: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est dérivable sur $]-1,1[$ donc $\arcsin(\text{th}\ )$est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. arctan et sh sont des fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc la composée est aussi définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Finalement f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\text{ch}^2(x)}}{\sqrt{1 - \text{th}^2(x)}} - \frac{\text{ch}(x)}{1 + \text{sh}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\text{ch}^2(x)}}} - \frac{\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} |\text{ch}(x)| - \frac{1}{\text{ch}(x)}$$

$$= \frac{1}{\text{ch}^2(x)} \times \text{ch}(x) - \frac{1}{\text{ch}(x)} = 0$$

Car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) > 0$ donc $|\text{ch}(x)| = \text{ch}(x)$

3) Sur l'intervalle $\mathbb{R}$:

$$f(x) = K$$

Or $f(0) = \arcsin(\text{th}(0)) - \arctan(\text{sh}(0)) = \arcsin(0) - \arctan(0) = 0$ donc $f(x) = 0$.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1) Si f est C^n sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

2)

f est C^1 sur $[64,65]$ et deux fois dérivable sur $]64,65[$.

$$f(t) = t^{\frac{1}{3}} \qquad f(64) = 64^{\frac{1}{3}} = (4^3)^{\frac{1}{3}} = 4$$

$$f'(t) = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} \qquad f'(64) = \frac{1}{3} \times (4^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times 4^{-2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{48}$$

$$f''(t) = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right) t^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9} t^{-\frac{5}{3}}$$

Il existe $c \in]64,65[$ tel que :

$$f(65) = f(64) + (65-64) f'(64) + \frac{(65-64)^2}{2} f''(c)$$

$$65^{\frac{1}{3}} = 4 + 1 \times \frac{1}{48} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{9}\right) c^{-\frac{5}{3}} = 4 + \frac{1}{48} - \frac{1}{9} c^{-\frac{5}{3}}$$

3)

$$65^{\frac{1}{3}} = 4 + \frac{1}{48} - \frac{1}{9} c^{-\frac{5}{3}} < 4 + \frac{1}{48} < 4 + 0{,}02084 = 4{,}02084$$

D'autre part

$$64 < c \Rightarrow 64^{-\frac{5}{3}} > c^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow c^{-\frac{5}{3}} < (4^3)^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow \frac{1}{9} c^{-\frac{5}{3}} < \frac{1}{9} \times 4^{-5} = \frac{1}{9 \times 4^5} = \frac{1}{9216} < \frac{1}{8000} = 1{,}25 \times 10^{-4}$$

Donc

$$\frac{1}{9} c^{-\frac{5}{3}} < 1{,}25 \times 10^{-4} \Rightarrow -0{,}000125 < -\frac{1}{9} c^{-\frac{5}{3}}$$

On en déduit que :

$$4 + \frac{1}{48} - 0{,}000125 < 4 + \frac{1}{48} - \frac{1}{9} c^{-\frac{5}{3}}$$

Or

$$0{,}02083 < \frac{1}{48}$$

Donc

$$4+0{,}02083-0{,}000125<4+\frac{1}{48}-\frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}}\Rightarrow 4{,}020705<\sqrt[3]{65}$$

Finalement

$$4{,}020705<\sqrt[3]{65}<4{,}02084$$

Ce qui assure que 4,0208 est une valeur approchée de $\sqrt[3]{65}$ à 10^{-4} près.

4)

$$0{,}020833<\frac{1}{48}<0{,}020834\qquad (1)$$

$$64<c<65<125\Rightarrow 64^{-\frac{5}{3}}>c^{-\frac{5}{3}}>(125)^{-\frac{5}{3}}\Rightarrow (5^3)^{-\frac{5}{3}}<c^{-\frac{5}{3}}<(4^3)^{-\frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow 5^{-5}<c^{-\frac{5}{3}}<4^{-5}\Rightarrow \frac{1}{9\times 5^5}<\frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}}<\frac{1}{9\times 4^5}\Rightarrow \frac{1}{28125}<\frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}}<\frac{1}{9216}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{30000}<\frac{1}{28125}<\frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}}<\frac{1}{9216}<\frac{1}{8000}\Rightarrow 4\times 10^{-5}<\frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}}<1{,}25\times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow -0{,}000125<-\frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}}<-0{,}000033\ldots\qquad (2)$$

En additionnant (1) et (2) :

$$0{,}020833-0{,}000125<\frac{1}{48}-\frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}}<0{,}020833\ldots-0{,}000033\ldots=0{,}0208$$

$$\Rightarrow 0{,}020705<\frac{1}{48}-\frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}}<0{,}0208\Rightarrow 4{,}020705<4+\frac{1}{48}-\frac{1}{9}c^{-\frac{5}{3}}<4{,}0208$$

$$\Rightarrow 4{,}020705<\sqrt[3]{65}<4{,}0208$$

Une valeur approchée à 10^{-4} près par défaut de $\sqrt[3]{65}$ est 4,0207

Allez à : Exercice 3