Université Claude Bernard Lyon 1

Math II - Algèbre

CC1 : Polynômes et fractions rationnelles

Date 6 Avril 2010 - durée : 1 heure

Question 1. Soit $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes sur le corps commutatif $\mathbb{K}$. Démontrer l'énoncé suivant :

L'élément $a \in \mathbb{K}$ est racine au moins double du polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$

si et seulement si

a est racine simultanément de P et du polynôme dérivé P'

Allez à : Correction question1

Question 2. Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

a) Montrer que $1 + j = -j^2$

b) Montrer que j est une racine multiple de P.

c) Trouver deux racines réelles évidentes de P.

d) Factoriser P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction question2

Question 3. Soit n un entier strictement positif.

a) Déterminer le pgcd des polynômes $X^n - 1$ et $(X-1)^n$ dans $\mathbb{R}[X]$.

b) Pour $n = 3$, trouver un couple de polynômes (U, V) tel que :

$$(X^3 - 1)U + (X-1)^3 V = X - 1$$

Allez à : Correction question3

Question 4. On considère la fraction rationnelle suivante de $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{P}{Q} = \frac{X^2 - 4}{(X^2 + 2X + 5)(X-1)^2}$$

a) Déterminer, sans calculer les coefficients, la forme de la décomposition en éléments simple de $\frac{P}{Q}$ sur $\mathbb{R}$.

Justifier votre réponse.

---

b) (Question bonus) Calculer les coefficients dans la décomposition de $\frac{P}{Q}$ trouvée au point a).

Allez à : Correction question4

CORRECTION

Correction question1.

Si $a \in \mathbb{K}$ est racine au moins double du polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = (X-a)^2 Q \Rightarrow P(a) = 0$$

a est racine de P.

$$P' = 2(X-a)Q + (X-a)^2 Q \Rightarrow P'(a) = 0$$

Donc a est racine de P'.

Réciproque

Si a est racine de P et de P'.
a est racine de P donc il existe Q_1 tel que $P = (X - a)Q_1$, en dérivant ce polynôme on trouve :

$$P' = Q_1 + (X - a)Q_1'$$

Or $P'(a) = 0$ donc $0 = Q_1(a) + (a - a)Q_1'(a)$, par conséquent $Q_1(a) = 0$, il existe donc un polynôme Q tel que $Q_1 = (X - a)Q$, ce que l'on remplace dans $P = (X - a)Q_1$ donc $P = (X - a)^2 Q$.
Cela signifie que a est racine double de P.
Allez à : Question 1

Correction question2.
a) $1 + j = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 = -j^2$
Ou mieux

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0$$

Car $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$.
b)

$$P(j) = (j + 1)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j^6 j - 1 = -j^{14} - j - 1 - j^{12} j^2 - j - 1 = -(j^2 + j + 1) = 0$$

$$P' = 7(X + 1)^6 - 7X^6$$

$$P'(j) = 7((j + 1)^6 - j^6) = 7((-j^2)^6 - 1) = 7(j^{12} - 1) = 7(1 - 1) = 0$$

Donc j est au moins racine double.
c) $P(0) = (0 + 1)^7 - 0^7 - 1 = 1^7 - 1 = 0$ et $P(-1) = (-1 + 1)^7 - (-1)^7 - 1 = 0 - (-1) - 1 = 0$
Donc 0 et -1 sont deux racines évidentes.
d) Le début de la formule du binôme de $(X + 1)^7$ est $X^7 + 7X^6$ (il y a plein d'autre terme mais il est inutile de les calculer) donc P est un polynôme de degré 6 et son coefficient dominant est 7.
D'autre part, j est racine double (au moins) donc $\bar{j} = j^2$ est aussi racine double (au moins) car P est un polynôme à coefficients réels. 0 et -1 sont aussi racine, cela donne 6 racine (au moins), comme $d°P = 6$ on a toutes les racines. La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P = 7X(X + 1)(X - j)^2 (X - \bar{j})^2$$

Dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(X - j)(X - \bar{j}) = (X - j)(X - j^2) = X^2 - (j + j^2)X + j^3 = X^2 + X + 1$$

Donc

$$P = 7X(X + 1)\left((X - j)(X - \bar{j})\right)^2 = 7X(X + 1)(X^2 + X + 1)^2$$

Allez à : Question 2

Correction question3.
a) $(X - 1)^n$ n'a qu'une racine $X = 1$, or 1 est racine simple de $X^n - 1$ donc

$$PGCD\left((X^n - 1), (X - 1)^n\right) = X - 1$$

b) D'après le théorème de Bézout il existe (U, V) tels que :

$$(X^3 - 1)U + (X - 1)^3 V = X - 1$$

Cette équation équivaut à :

$$(X^2 + X + 1)U + (X^2 - 2X + 1) = 1$$

Car $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ et $(X - 1)^3 = (X - 1)(X^2 - 2X + 1)$

$$\begin{array}{r|l} X^2 - 2X + 1 & X^2 + X + 1 \\ \cline{2-2} X^2 + X \ \ + 1 & 1 \\ \hline -3X & \end{array}$$

Donc

$$X^2-2X+1=1\times(X^2+X+1)+(-3X)$$

$$\begin{array}{l|l}
X^2+X+1 & -3X \\ \cline{2-2}
X^2 & -\frac{1}{3}X-\frac{1}{3} \\ \hline
\quad X+1 & \\
\quad X & \\ \hline
\qquad 1 &
\end{array}$$

Donc

$$X^2+X+1=(-3X)\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)+1$$

On en tire que :

$$\begin{aligned}
1&=(X^2+X+1)-(-3X)\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)\\
&=X^2+X+1-\left((X^2-2X+1)-1\times(X^2+X+1)\right)\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)\\
&=-\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)(X^2-2X+1)+\left(1+\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)\right)(X^2+X+1)\\
&=\left(\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}\right)(X^2-2X+1)+\left(-\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}\right)(X^2+X+1)
\end{aligned}$$

Donc

$U=-\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}$ et $V=\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}$

Autre méthode

Comme $(X-1)^3=X^3-3X^2+3X-1$

$$\begin{array}{l|l}
X^3-3X^2+3X-1 & X^3-1 \\ \cline{2-2}
X^3 \qquad\qquad\quad -1 & 1 \\ \hline
\quad -3X^2+3X &
\end{array}$$

$$(X-1)^3=1\times(X^3-1)+(-3X^2+3X)$$

$$\begin{array}{l|l}
X^3 \qquad\qquad -1 & -3X^2+3X \\ \cline{2-2}
X^3-X^2 & -\frac{1}{3}X-\frac{1}{3} \\ \hline
\quad X^2 \qquad -1 & \\
\quad X^2-X & \\ \hline
\qquad X-1 &
\end{array}$$

$$X^3-1=\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)(-3X^2+3X)+X-1$$

Il est inutile de faire une troisième division car

$$-3X^2+3X=-3X(X-1)+0$$

$$\begin{aligned}
X-1&=X^3-1-\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)(-3X^2+3X)=X^3-1-\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)\left((X-1)^3-(X^3-1)\right)\\
&=(X^3-1)\left(1+\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)\right)-\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)(X-1)^3\\
&=(X^3-1)\left(-\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}\right)(X-1)^3
\end{aligned}$$

On retrouve le même résultat.

Allez à : Question 3

Correction question4.

a) Le polynôme X^2+2X+5 n’a pas de racine réelle car $\Delta=2^2-4\times 5=-16<0$. Et 1 est une racine double.

$$\frac{P}{Q}=\frac{aX+b}{X^2+2X+5}+\frac{c}{X-1}+\frac{d}{(X-1)^2}$$

b) Je multiplie par $(X-1)^2$, puis $X=1$.

$$d=\left[\frac{X^2-4}{X^2+2X+5}\right]_{X=1}=\frac{-3}{8}$$

Je multiplie par X, puis $X\to+\infty$.

$$0=a+c\Leftrightarrow a=-c$$

$X=0$.

$$-\frac{4}{5}=\frac{b}{5}-c+d\Leftrightarrow -4=b-5c+5\times\left(-\frac{3}{8}\right)\Leftrightarrow b=5c-\frac{17}{8}$$

$X=-1$.

$$\frac{-3}{16}=\frac{-a+b}{4}-\frac{c}{2}+\frac{d}{4}\Leftrightarrow -\frac{3}{4}=-a+b-2c+d\Leftrightarrow -\frac{3}{4}=c+5c-\frac{17}{8}-2c-\frac{3}{8}\Leftrightarrow 4c=-\frac{3}{4}+\frac{17}{8}+\frac{3}{8}$$
$$\Leftrightarrow 4c=\frac{7}{4}\Leftrightarrow c=\frac{7}{16}$$

Donc

$$a=\frac{-7}{16}$$
$$b=5\times\frac{7}{16}-\frac{17}{8}=\frac{1}{16}$$
$$\frac{X^2-4}{(X^2+2X+5)(X-1)^2}=\frac{\frac{-7}{16}X+\frac{1}{16}}{X^2+2X+5}+\frac{\frac{7}{16}}{X-1}-\frac{\frac{3}{8}}{(X-1)^2}$$

Autre méthode pour calculer a et b

Les racines complexes de X^2+2X+5 sont :

$$X_1=\frac{-2-4i}{2}=-1-2i$$

Et

$$X_2=-1+2i$$

On multiplie par X^2+2X+5, puis $X=-1+2i$

$$a(-1+2i)+b=\left[\frac{X^2-4}{(X-1)^2}\right]_{X=-1+2i}=\frac{(-1+2i)^2-4}{(-1+2i-1)^2}=\frac{1-4i-4-4}{(-2+2i)^2}=\frac{-7-4i}{4(-1+i)^2}=\frac{-7-4i}{4(-2i)}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{7}{8}i$$

Donc

$$-a+b+2ai=\frac{1}{2}-\frac{7}{8}i\Leftrightarrow\begin{cases}-a+b=\frac{1}{2}\\ 2a=-\frac{7}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{7}{16}+b=\frac{1}{2}\\ a=-\frac{7}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{2}-\frac{7}{16}=\frac{1}{16}\\ a=-\frac{7}{16}\end{cases}$$

Ensuite pour trouver d on fait pareil que précédemment, puis pour calculer c, soit on fait $X=0$ ou on multiplie par X et on fait tendre X vers l'infini.

Allez à : Question 4