Contrôle terminal-Mercredi 1 juin 2016

Durée : 2h

Les documents, les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés

Questionnaire. (7 points) On veillera à justifier toute réponse avec soin.

Q1.Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez brièvement votre réponse.

(a) Soit $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire surjective. Alors $\dim(\ker(f)) = 2$.

(b) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Le système

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ -2x + y + z = b \\ -x + 3y + 2z = c \end{cases}$$

A une solution unique.

(c) L'ensemble $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xyz = 1\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(d) L'ensemble $V = \{(2t, 4t, -t), t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(e) L'intersection de deux sous-espaces distincts de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

Q2. Parmi les matrices suivantes lesquelles sont inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction Questionnaire

Q1.

(a) D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim\big(Im(f)\big) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$$

f est surjective donc $Im(f) = \mathbb{R}^2$, ce qui entraine que $\dim\big(Im(f)\big) = 2$, par conséquent

$$\dim(\ker(f)) = 2$$

(b)

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ -2x + y + z = b \\ -x + 3y + 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

0n pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 - (-6) - 5 = 0$$

A n'est pas inversible donc le système admet une infinité de solution

(c) $(0,0,0) \notin V$ donc V n'est pas un espace vectoriel

(d) $u = (x, y, z) \in V \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, u = (2t, 4t, -t) = t(2,4,-1)$ donc $V = vect\big((2,4,-1)\big)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(e) Soient E et F deux espace de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$, d'après la formule de Grassmann

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = 6 - \dim(E \cap F)$$

$$E \subset E + F \Rightarrow 3 = \dim(E) \leq \dim(E + F)$$

Si $\dim(E + F) = 3$ alors $E = E + F$

De même $F = E + F$, donc $E = F$ ce qui n'est pas possible, par conséquent $\dim(E + F) = 4$

D'où l'on déduit que $\dim(E \cap F) = 2$

Q2.

Les 5 colonnes de A sont proportionnelles donc $rg(A) = 1$, pour que A soit inversible, il est nécessaire et suffisant que $rg(A) = 5$, A n'est pas inversible.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Donc B est inversible.

C est la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^5$,

$$x = (x_1, x_2 x_3, x_4, x_5) \in \ker(u) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la ligne 2 à la ligne 1 on trouve $x_3 = 0$, on remplace

$$x = (x_1, x_2 x_3, x_4, x_5) \in \ker(u) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_4 = -x_2 \\ x_5 = -x_4 = x_2 \end{cases}$$

$$x = (-x_2, x_2, 0, -x_2, x_2) = x_2(-1,1,0,-1,1)$$

$$\dim(\ker(u)) = 1$$

D'après le théorème du rang, son rang est $4 < 5$, C n'est pas inversible

Exercice 1. 6 points

Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. L'application u est-elle injective ? surjective ? Justifiez vos réponses
2. On considère les vecteurs $b_1 = (1, -2,1)$, $b_2 = (0,1,0)$ et $b_3 = (1,0, -1)$
   Montrer que $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer $D = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
4. Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et calculer P^{-1}.
5. Que représente la matrice PDP^{-1} ?
6. En déduire A^{2016} ?

Correction exercice 1.

1.

$$x=(x_1,x_2,x_3)\in\ker(u)\Leftrightarrow AX=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&0&-1\\2&4&2\\-1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_3=0\\2x_1+4x_2+2x_3=0\\-x_1+3x_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1-x_3=0\\2x_1+4x_2+2x_3=0\\x_1=3x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8x_3=0\\2x_1+4x_2+2x_3=0\\x_1=3x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}$$

Ce qui que $\ker(u)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, par conséquence u est injective, puis comme u est un endomorphisme, u est surjective.

2.

$$\det(b_1,b_2,b_3)=\begin{vmatrix}1&0&1\\-2&1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2\neq0$$

Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Les coordonnées de $u(b_1)$ dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix}3&0&-1\\2&4&2\\-1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Donc $u(b_1)=2b_1$

Les coordonnées de $u(b_2)$ dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix}3&0&-1\\2&4&2\\-1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Donc $u(b_2)=4b_2$

Les coordonnées de $u(b_3)$ dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix}3&0&-1\\2&4&2\\-1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Donc $u(b_3)=4b_3$

$$D=Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}u(b_1)&u(b_2)&u(b_3)\end{array}\\\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\b_1\\b_2\\b_3\end{array}$$

4.

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$PX=Y\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}x_1+x_3=y_1\\-2x_1+x_2=y_2\\x_1-x_3=y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2+2l_1\\L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}x_1+x_3=y_1\\x_2+2x_3=2y_1+y_2\\-2x_3=-y_1+y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=y_1-x_3\\x_2=2y_1+y_2-2x_3\\x_3=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=y_1-\left(\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_3\right)\\x_2=2y_1+y_2-2\left(\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_3\right)\\x_3=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_3\\x_2=y_1+y_2+y_3\\x_3=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\1&1&1\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

Donc

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

5. D'après le théorème de changement de base $A=PDP^{-1}$
6.

$$\begin{aligned}A^{2016}=PD^{2016}P^{-1}&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{2016} & 0 & 0\\ 0 & 4^{2016} & 0\\ 0 & 0 & 4^{2016}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2^{2016} & 0 & 4^{2016}\\ -2\times 2^{2016} & 4^{2016} & 0\\ 2^{2016} & 0 & -4^{2016}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2^{2016}+4^{2016} & 0 & 2^{2016}-4^{2016}\\ -2\times 2^{2016}+2\times 4^{2016} & 4^{2016} & -2\times 2^{2016}+2\times 4^{2016}\\ 2^{2016}-4^{2016} & 0 & 2^{2016}+4^{2016}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exercice 2. (5 points) On considère le polynôme $P(X)=X^4+2X^3+2X^2+2X+1$

1. Montrer que -1 est racine double du polynôme $P(X)$
2. Factoriser $P(X)$ en facteurs irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Ecrire la décomposition en éléments simple dans $\mathbb{R}[X]$ de la fraction rationnelle

$$F(X)=\frac{X^2+4X-1}{X^4+2X^3+2X^2+2X+1}$$

Correction exercice 2.

1. $P(-1)=1-2+2-2+1=0$ donc -1 est au moins racine simple
$$P'(X)=4X^3+6X^2+4X+2\Rightarrow P'(-1)=-4+6-4+2=0$$
Donc -1 est au moins racine double.
2. $P(X)$ est divisible par $(X+1)^2=X^2+2X+1$
$$\begin{array}{r|l} X^4+2X^3+2X^2+2X+1 & X^2+2X+1\\ \cline{2-2} X^4+2X^3+X^2 & X^2+1\\ \hline X^2+2X+1 & \\ X^2+2X+1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$
Donc $P(X)=(X+1)^2(X^2+1)$
3.
$$F(X)=\frac{X^2+4X-1}{X^4+2X^3+2X^2+2X+1}=\frac{X^2+4X-1}{(X+1)^2(X^2+1)}$$
Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, pas de division
Il existe quatre réels a,b,c et d tels que :
$$F(X)=\frac{X^2+4X-1}{(X+1)^2(X^2+1)}=\frac{a}{X+1}+\frac{b}{(X+1)^2}+\frac{cX+d}{X^2+1}$$
On multiplie par $(X+1)^2$, puis $X=-1$
$$b=\left[\frac{X^2+4X-1}{(X^2+1)}\right]_{X=-1}=-2$$
On multiplie par X^2+1, puis $X=i$
$$ci+d=\left[\frac{X^2+4X-1}{(X+1)^2}\right]_{X=i}=\frac{-2+4i}{(i+1)^2}=\frac{-2+4i}{2i}=-\frac{1}{i}+2=i+2$$
Donc $c=1$ et $d=2$
Ensuite on a deux solutions, soit on multiplie par X, puis $X\to+\infty$
$$0=a+c\Rightarrow a=-c=-1$$

Soit $X = 0$

$$-1 = a + b + d \Rightarrow a = -1 - b - d = -1 + 2 - 2 = -1$$

Finalement

$$F(X) = -\frac{1}{X+1} - \frac{2}{(X+1)^2} + \frac{X+2}{X^2+1}$$

Exercice 3. ((7 points) *Interpolation de Lagrange*

On désigne par $\mathbb{R}_2[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitués des polynômes de degré au plus 2. Soient a, b, c trois nombres réels deux à deux distincts et

$$\varphi: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$$
$$P \mapsto \big(P(a), P(b), P(c)\big)$$

L'application d'évaluation en a, b et c

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Dire pourquoi le seul polynôme de degré au plus 2 tel que $\varphi(P) = (0,0,0)$ est le polynôme nul $P = 0$. En déduire que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   Indication : On pourra se baser sur des résultats du cours, en veillant à citer avec soin tout résultat utilisé
3. Expliciter les polynômes L_a, L_b, L_c de degré au plus 2 tels que :
   $$\varphi(L_a) = (1,0,0), \quad \varphi(L_b) = (0,1,0), \quad \varphi(L_c) = (0,0,1)$$
   (Ces polynômes sont appelés les polynômes d'interpolation de Lagrange)
   Dans les deux questions qui suivent, on pourra se servir de l'application φ.
4.
   (i) Montrer que la famille (L_a, L_b, L_c) est libre. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (ii) Déterminer les coordonnées du polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ dans la base (L_a, L_b, L_c).
5. Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $d \geq 3$. Exprimer le reste de la division euclidienne de A par $(X-a)(X-b)(X-c)$ en termes des polynômes d'interpolation (L_a, L_b, L_c)

Correction exercice 3.

1. Soient P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et soient λ_1, λ_2 deux réels.
   $$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= \big((\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(a), (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(b), (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(c)\big)\\ &= \big(\lambda_1 P_1(a) + \lambda_2 P_2(a), \lambda_1 P_1(b) + \lambda_2 P_2(b), \lambda_1 P_1(c) + \lambda_2 P_2(c)\big)\\ &= \lambda_1\big(P_1(a), P_1(b), P_1(c)\big) + \lambda_2\big(P_2(a), P_2(b), P_2(c)\big) = \lambda_1 \varphi(P_1) + \lambda_2 \varphi(P_2)\end{aligned}$$
   Ce qui montre que φ est linéaire.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$
   $$\varphi(P) = (0,0,0) \Leftrightarrow \big(P(a), P(b), P(c)\big) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} P(a) = 0 \\ P(b) = 0 \\ P(c) = 0 \end{cases}$$
   Or un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à deux à au plus deux racines réelles, donc $P = 0$
3.
   $$\varphi(L_a) = (1,0,0) \Leftrightarrow \big(L_a(a), L_a(b), L_a(c)\big) = (1,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} L_a(a) = 1 \\ L_a(b) = 0 \\ L_a(c) = 0 \end{cases}$$
   D'où on déduit que b et c sont des racines de L_a, il existe donc une constante $K \in \mathbb{R}$ tel que
   $$L_a(X) = K(X-b)(X-c)$$
   Puis la première équation donne
   $$L_a(a) = 1 \Leftrightarrow K(a-b)(a-c) = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$$
   Par conséquent

$$L_a(X) = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}$$

$$\varphi(L_b) = (0,1,0) \Leftrightarrow \big(L_b(a), L_b(b), L_b(c)\big) = (0,1,0) \Leftrightarrow \begin{cases} L_b(a) = 0 \\ L_b(b) = 1 \\ L_b(c) = 0 \end{cases}$$

D'où on déduit que a et c sont des racines de L_b, il existe donc une constante $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$L_a(X) = K(X-a)(X-c)$$

Puis la seconde équation donne

$$L_b(b) = 1 \Leftrightarrow K(b-a)(b-c) = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{(b-a)(b-c)}$$

Par conséquent

$$L_a(X) = \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)}$$

$$\varphi(L_c) = (0,0,1) \Leftrightarrow \big(L_c(a), L_b(b), L_b(c)\big) = (0,0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} L_c(a) = 0 \\ L_c(b) = 0 \\ L_c(c) = 1 \end{cases}$$

D'où on déduit que a et b sont des racines de L_b, il existe donc une constante $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$L_c(X) = K(X-a)(X-b)$$

Puis la troisième équation donne

$$L_c(c) = 1 \Leftrightarrow K(c-a)(c-b) = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

Par conséquent

$$L_c(X) = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$$

4.

(i) Soient α, β et γ, trois réels

$$\alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c = 0 \Rightarrow \varphi(\alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c) = \varphi(0) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow \alpha\varphi(L_a) + \beta\varphi(L_b) + \gamma\varphi(L_c) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$$
$$= (0,0,0) \Rightarrow (\alpha,\beta,\gamma) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

La famille (L_a, L_b, L_c) est libre, c'est une famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension trois, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(ii) Soient α, β et γ, trois réels tels que $P \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$P = \alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c$$

$$\varphi(P) = \big(P(a), P(b), P(c)\big) \Leftrightarrow \big(P(a), P(b), P(c)\big)$$
$$= \big((\alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c)(a), (\alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c)(b), (\alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c)(c)\big)$$
$$\Leftrightarrow \big(P(a), P(b), P(c)\big)$$
$$= \big(\alpha L_a(a) + \beta L_b(a) + \gamma L_c(a), \alpha L_a(b) + \beta L_b(b) + \gamma L_c(b), \alpha L_a(c) + \beta L_b(c)$$
$$+ \gamma L_c(c)\big)$$
$$= \big(\alpha L_a(a) + \beta L_b(a) + \gamma L_c(a), \alpha L_a(b) + \beta L_b(b) + \gamma L_c(b), \alpha L_a(c) + \beta L_b(c)$$
$$+ \gamma L_c(c)\big) = (\alpha,\beta,\gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = P(a) \\ \beta = P(b) \\ \gamma = P(c) \end{cases}$$

D'où $P = P(a)L_a + P(b)L_b + P(c)L_c$

5. Dans la division de $A \in \mathbb{R}[X]$ par $(X-a)(X-b)(X-c)$ il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ et un polynôme $R \in \mathbb{R}_2[X]$, donc il existe α, β et γ, trois réels tels que $R = \alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c$ tels que :

$$A = (X-a)(X-b)(X-c)Q + \alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c$$

Ce qui entraine que :

$$A(a) = \alpha L_a(a) + \beta L_b(a) + \gamma L_c(a) = \alpha$$

$$A(b) = \alpha L_a(b) + \beta L_b(b) + \gamma L_c(b) = \beta$$
$$A(c) = \alpha L_a(c) + \beta L_b(c) + \gamma L_c(c) = \gamma$$

Donc $R = A(a)L_a + A(b)L_b + A(c)L_c$