Contrôle terminal-Mercredi 1 juin 2016

Durée : 2h

Les documents, les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés

Questionnaire. (7 points) On veillera à justifier toute réponse avec soin.

Q1. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez brièvement votre réponse.

(a) Soit $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire surjective. Alors $\dim(\ker(f)) = 2$.

(b) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Le système

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ -2x + y + z = b \\ -x + 3y + 2z = c \end{cases}$$

A une solution unique.

(c) L'ensemble $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xyz = 1\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(d) L'ensemble $V = \{(2t, 4t, -t), t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(e) L'intersection de deux sous-espaces distincts de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

Q2. Parmi les matrices suivantes lesquelles sont inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1. 6 points

Soit $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. L'application u est-elle injective ? surjective ? Justifiez vos réponses
2. On considère les vecteurs $b_1 = (1, -2, 1)$, $b_2 = (0, 1, 0)$ et $b_3 = (1, 0, -1)$
   Montrer que $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer $D = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
4. Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et calculer P^{-1}.
5. Que représente la matrice PDP^{-1} ?
6. En déduire A^{2016} ?

Exercice 2. (5 points) On considère le polynôme $P(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$

1. Montrer que -1 est racine double du polynôme $P(X)$
2. Factoriser $P(X)$ en facteurs irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Ecrire la décomposition en éléments simple dans $\mathbb{R}[X]$ de la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^2 + 4X - 1}{X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1}$$

Exercice 3. ((7 points) *Interpolation de Lagrange*

On désigne par $\mathbb{R}_2[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitués des polynômes de degré au plus 2. Soient a, b, c trois nombres réels deux à deux distincts et

$$\varphi\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$$
$$P \mapsto \big(P(a), P(b), P(c)\big)$$

L'application d'évaluation en a, b et c

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Dire pourquoi le seul polynôme de degré au plus 2 tel que $\varphi(P) = (0,0,0)$ est le polynôme nul $P = 0$. En déduire que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   Indication : On pourra se baser sur des résultats du cours, en veillant à citer avec soin tout résultat utilisé
3. Expliciter les polynômes L_a, L_b, L_c de degré au plus 2 tels que :
   $$\varphi(L_a) = (1,0,0), \quad \varphi(L_b) = (0,1,0), \quad \varphi(L_c) = (0,0,1)$$
   (Ces polynômes sont appelés les polynômes d'interpolation de Lagrange)
   Dans les deux questions qui suivent, on pourra se servir de l'application φ.
4.
   (i) Montrer que la famille (L_a, L_b, L_c) est libre. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (ii) Déterminer les coordonnées du polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ dans la base (L_a, L_b, L_c).
5. Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $d \geq 3$. Exprimer le reste de la division euclidienne de A par $(X-a)(X-b)(X-c)$ en termes des polynômes d'interpolation (L_a, L_b, L_c)