Examen de Contrôle Continu 8h30-10h30: u Final

Analyse II

Mardi 2 juin 2015

Tout document, calculatrice téléphone portable interdits

Exercice 1. (4 points)

1. Calculez

$$\int_4^5 \frac{2-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}dx$$

2. Déterminez les primitives de la fonction $x \to \sin(x)\cos(2x)$
3. Déterminez les primitives de la fonction $x \to \ln(x^2+1)$

Correction exercice 1.

1. Première méthode

$$\int_4^5 \frac{2-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}dx = \int_4^5 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - x\right)dx = \left[4\sqrt{x} - \frac{x^2}{2}\right]_4^5 = 4\sqrt{5} - \frac{25}{2} - \left(4\sqrt{4} - \frac{4^2}{2}\right) = 4\sqrt{5} - \frac{25}{2}$$

Deuxième méthode

On pose le changement de variable $t = \sqrt{x}$, ce qui équivaut à $x = t^2$ donc $dx = 2tdt$

$$x = 4 \Rightarrow t = \sqrt{4} = 2$$

$$x = 5 \Rightarrow t = \sqrt{5}$$

$$\frac{2-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{2-\left(\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}} = \frac{2-t^3}{t}$$

Donc

$$\int_4^5 \frac{2-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}dx = \int_2^{\sqrt{5}} \frac{2-t^3}{t}2tdt = 2\int_2^{\sqrt{5}}(2-t^3)dt = 2\left[2t - \frac{t^4}{4}\right]_2^{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5} - \frac{\left(\sqrt{5}\right)^4}{2} - \left(8 - \frac{2^4}{2}\right)$$

$$= 4\sqrt{5} - \frac{25}{2} - 8 + 8 = 4\sqrt{5} - \frac{25}{2}$$

2. Première méthode

$$\int \cos(2x)\sin(x)\,dx = \int (2\cos^2(x) - 1)\sin(x)\,dx$$

On pose $t = \cos(x)$ alors $dt = -\sin(x)\,dx$

$$\int \cos(2x)\sin(x)\,dx = \int (2t^2-1)(-dt) = \int (1-2t^2)dt = t - \frac{2}{3}t^3 + K$$

$$= \cos(x) - \frac{2}{3}\cos^3(x) + K$$

Deuxième méthode

$$\sin(x)\cos(2x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \times \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} = \frac{e^{3ix}+e^{ix}-e^{-ix}-e^{-3ix}}{4i}$$

$$= \frac{e^{3ix}-e^{-3ix}+e^{ix}-e^{-ix}}{4i} = \frac{2i\sin(3x)+2i\sin(x)}{4i} = \frac{\sin(3x)+\sin(x)}{2}$$

Donc

$$\int \sin(x)\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin(3x)+\sin(x))dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos(3x) - \cos(x)\right) + K$$

$$= -\frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{2}\cos(x) + K$$

3.

$$\int \ln(x^2+1)\,dx = \int 1 \times \ln(x^2+1)\,dx$$

$\int \ln(x^2+1)\,dx$

$u'(x) = 1$ $\quad$ $u(x) = x$

$v(x) = \ln(x^2+1)$ $\quad$ $v'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

$\int \ln(x^2+1)\,dx = x\ln(x^2+1)$ $\quad$ $-2\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$

Par conséquent

$$\int \ln(x^2+1)\,dx = x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$
$$= x\ln(x^2+1) - 2\int 1 - \frac{1}{x^2+1}dx = x\ln(x^2+1) - 2(x - \arctan(x)) + K$$
$$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan(x) + K$$

Exercice 2.

1. Déterminer les primitives de la fonction
$$x \to \frac{1}{1+e^x}$$
2. Prouver que l'intégrale impropre (ou généralisée)
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x}dx$$
Converge et donner sa valeur.
3. Prouver que l'intégrale impropre
$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{(1+e^x)^2}dx$$
Converge.

Correction exercice 2.

1. On pose $t = e^x$, soit $x = \ln(t)$ donc $dx = \frac{dt}{t}$
$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+t}$$
Et
$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{1+t} \times \frac{1}{t}dt$$
Puis on décompose $\frac{1}{(1+t)t}$ en éléments simples, il existe a et b, réels tels que
$$\frac{1}{(t+1)t} = \frac{a}{t} - \frac{b}{t+1}$$
On multiplie par t, puis $t = 0$
$$a = \left[\frac{1}{t+1}\right]_{t=0} = 1$$
On multiplie par $t+1$, puis $t = -1$
$$b = \left[\frac{1}{t}\right]_{t=0} = -1$$
Par conséquent
$$\frac{1}{(t+1)t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$
Et alors
$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \ln|t| - \ln|t+1| + K = \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) + K = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + K$$
2.

$$\int_0^X \frac{1}{1+e^x}dx = \left[\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)\right]_0^X = \ln\left(\frac{e^X}{e^X+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{1+1}\right) = \ln\left(\frac{e^X}{e^X+1}\right) + \ln(2)$$

On pose $u = e^X \to +\infty$ donc

$$\frac{e^X}{e^X+1} = \frac{u}{u+1} \to 1$$

Par conséquent

$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{1}{1+e^x}dx = \ln(1) + \ln(2) = \ln(2)$$

3.

$$\left|x^2 \frac{\arctan(x)}{(1+e^x)^2}\right| < \frac{x^2}{e^{2x}} \times \frac{\pi}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Par croissance comparée, et $2 > 1$, donc d'après les règles de Riemann, l'intégrale converge

Exercice 3.

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2-x}\right)$$

1. Montrer que le domaine de définition de f est $]-\infty, 1]$.
2. Montrer que f est continue (sur son domaine).
3. En quels points f est-elle dérivable ? Donner sa dérivée.
4. Donnez le développement limité de la fonction

$$g(x) = \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

Au point $a = 0$ et à l'ordre 2. En déduire le développement limité de f au point $a = 0$ et à l'ordre 3.

Correction exercice 3.

1.

$$1 - \left(\frac{x}{2-x}\right)^2 = \frac{(2-x)^2 - x^2}{(2-x)^2} = \frac{4 - 4x + x^2 - x^2}{(2-x)^2} = 4\frac{1-x}{(2-x)^2}$$

f définie si et seulement si $1 - \left(\frac{x}{2-x}\right)^2 \geq 0$ car

$$1 - \left(\frac{x}{2-x}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{2-x} \leq 1$$

autrement dit si et seulement si $1 - x \geq 0$. Par conséquent f est définie sur $]-\infty, 1]$.

2.

$$x \to \frac{x}{2-x}$$

Est le quotient de fonctions continues sur $]-\infty, 1]$ elle est continue, comme pour tout $x \leq 1$, $-1 \leq \frac{x}{2-x} \leq 1$ et que arcsin est continue sur $]-\infty, 1]$, f est la composée de fonctions continues donc elle est continue.

3.

$$f'(x) = \frac{\frac{1\times(2-x) - x\times(-1)}{(2-x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2-x}\right)^2}} = \frac{2}{(2-x)^2\sqrt{4\frac{1-x}{(2-x)^2}}} = \frac{2|2-x|}{(2-x)^2 2\sqrt{1-x}}$$

Or pour tout $x < 1$, $2 - x > 0$ donc $|2-x| = 2 - x$

$$f'(x) = \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x-1^+} f'(x) = +\infty$$

Ce qui montre que f n'est pas dérivable en 1.

4.

$$(2-x)\sqrt{1-x}=(2-x)(1-x)^{\frac{1}{2}}=(2-x)\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)$$
$$=(2-x)\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)=2+(-1-1)x+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)x^2+o(x^2)$$
$$=2-2x+\frac{1}{4}x^2+o(x^2)$$

$$\begin{array}{l|l}
1 & 2-2x+\frac{1}{4}x^2+o(x^2) \\ \cline{2-2}
1-x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2) & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{7}{16}x^2 \\ \cline{1-1}
x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2) & \\
x-x^2+o(x^2) & \\ \cline{1-1}
\frac{7}{8}x^2+o(x^2) & \\
\frac{7}{8}x^2+o(x^2) & \\ \cline{1-1}
o(x^2) &
\end{array}$$

Par conséquent

$$g(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{7}{16}x^2+o(x^2)$$

Puis comme $f'(x)=g(x)$

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{48}x^3+o(x^3)=\arcsin(0)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{48}x^3+o(x^3)$$
$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{48}x^3+o(x^3)$$

Exercice 4.

On considère la fonction

$$g(x)=(x-1)\arctan(x)$$

1. Déterminer un développement limité de g en 0 à l'ordre 2.
2. En déduire l'équation de la tangente de g en 0, ainsi que la position du graphe de g par rapport à cette tangente.
3. Prouvez que la limite suivante existe et la déterminer :
$$\lim_{x\to 0}\frac{xg(x^2)}{(\ln(1+2x))^3}$$
4. Prouver, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange, que pour tout $x\in[0,1]$, on a
$$0\le g(x)+x\le 2x^2$$

Correction exercice 4.

1. La dérivée de $x\to\arctan(x)$ est $x\to\frac{1}{1+x^2}=1+o(x)$, donc le développement limité $x\to\arctan(x)$ à l'ordre 2 en 0 est
$$\arctan(x)=\arctan(0)+x+o(x^2)=x+o(x^2)$$
On en déduit que :
$$g(x)=(x-1)\big(x+o(x^2)\big)=-x+x^2+o(x^2)$$
2. Une équation de la tangente de g en 0 est $y=-x$
$$g(x)-x=x^2+o(x^2)=x^2\big(1+o(1)\big)>0$$
Au voisinage de 0, le graphe est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.
3.
$$\frac{xg(x^2)}{(\ln(1+2x))^3}=\frac{x\big(-x^2+x^4+o(x^4)\big)}{(\ln(1+2x))^3}\underset{0}{\sim}\frac{-x^3}{(2x)^3}=-\frac{1}{8}$$
Par conséquent

$$\lim_{x\to 0}\frac{xg(x^2)}{(\ln(1+2x))^3}=-\frac{1}{8}$$

4. g est dérivable autant de fois que l'on veut en 0, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 entre 0 et x, il existe $c\in]0,x[\subset]0,1[$

$$g(x)=g(0)+xg'(0)+\frac{x^2}{2}g''(c)$$

$$g'(x)=\arctan(x)+\frac{x-1}{x^2+1}\Rightarrow g'(0)=-1$$

$$g''(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1\times(x^2+1)-2x(x-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x^2+1)-2x(x-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2+2-2x^2+2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{2+2x}{(x^2+1)^2}$$

Alors

$$g(x)=-x+\frac{x^2}{2}\frac{2+2c}{(c^2+1)^2}\Leftrightarrow g(x)+x=\frac{x^2(1+c)}{(c^2+1)^2}$$

Il est clair que

$$g(x)+x=\frac{x^2(1+c)}{(c^2+1)^2}\geq 0$$

D'autre part

$$g(x)+x=\frac{x^2(1+c)}{(c^2+1)^2}\leq\frac{x^2(1+1)}{(0^2+1)^2}=2x^2$$

Ce qui montre que pour tout $x\in[0,1]$

$$0\leq g(x)+x\leq 2x^2$$