Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « sciences et technologie »
Contrôle final
3 juin 2015 durée 2h

Question

1. Soit φ une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F.
   a. Rapppeler la définition du noyau $\ker(\varphi)$ de φ.
   b. Montrer que φ est injective si et seulement si $\ker(\varphi)$.
   c. Enoncé la formule du rang en faisant attention aux hypothèses.
2. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Dans chaque cas, donner une preuve rapide ou un contre-exemple.
   a. Il existe une matrice à 3 lignes et 4 colonnes dont le rang est 2.
   b. Il existe une matrice à 3 lignes et 4 colonnes dont le rang est 4.
   c. La partie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - x = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de respectivement de dimension 3 et 4.. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ une base de F

Soit $u: E \to F$ l'application linéaire définie par

$$u(e_1) = -f_1 + f_3$$
$$u(e_2) = -f_1 + 2f_2 - f_3$$
$$u(e_3) = -2f_1 - 2f_2 + 4f_3$$
$$u(e_4) = 4f_2 - 4f_3$$

1. Donner la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
2. Déterminer une base du noyau $\ker(u)$.
3. En déduire le rang de u.
4. Donner une base de l'image de u.
5. Soit $G = vect(f_1)$ le sous-espace vectoriel de F engendré par f_1. Montrer que $G \oplus Im(u) = F$.

Exercice 2.

Soit $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\dim(\ker(\phi)) = 1$.
2. Donner une base $\mathcal{B} = (a)$ de $\ker(\phi)$.
3. Montrer que $a \in Im(\phi)$ et déterminer un vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $\phi(b) = a$.
4. Montrer que l'ensemble $E = \{v \in \mathbb{R}^3, \phi(v) = v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
5. Donner un vecteur non nul de E.
6. Soient λ, μ et ν trois réels tels que $\lambda a + \mu b + \nu c = 0_{\mathbb{R}^3}$, montrer que $\mu a + \nu c = 0_{\mathbb{R}^3}$.
7. Montrer que (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$.
8. Donner la matrice de ϕ dans la base (a, b, c).

Exercice 3.

Soit X une indéterminée. Déterminer un polynôme réel $E(X)$ et des réels a, b, c tels que :

$$\frac{3X^5 - X^3 + X}{(X^2-1)^3} = E(X) + \frac{\frac{3}{8}}{(X+1)^3} - \frac{\frac{17}{16}}{(X+1)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{X+1} + \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1}$$

On pourra remarquer que la fraction F du membre de gauche est impaire : $F(-X) = -F(X)$

Correction

Questionnaire

1.
   a. $\ker(\phi) = \{v \in E, \phi(v) = 0_F\}$
   b. Si ϕ est injective.
   Comme $\phi(0_E) = 0_F$
   $$u \in \ker(\phi) \Rightarrow \phi(u) = 0_F \Rightarrow \phi(u) = \phi(0_E) \Rightarrow u = 0_E$$
   Car u est injective.
   Cela montre que $\ker(\phi) = \{0_F\}$
   Si $\ker(\phi) = \{0_E\}$
   $$\phi(u) = \phi(v) \Rightarrow \phi(u) - \phi(v) = 0_F \Rightarrow \phi(u - v) = 0_F$$
   Car ϕ est linéaire. Cela montre que $u - v \in \ker(\phi)$ et comme $\ker(\phi) = \{0_F\}$, on a
   $$u - v = 0_F$$
   Ce qui entraine que $u = v$, cela montre que ϕ est injective.
   Finalement ϕ est injective si et seulement si $\ker(\phi) = \{0_E\}$
   c. Si E et F sont des espaces vectoriels de dimensions finies
   $$\dim(\ker(\phi) + \dim\big(Im(\phi)\big) = \dim(E)$$
2.
   a.
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Le rang de A est deux, il y a deux colonnes indépendantes et pas plus.
   b. Le rang d'une matrice est inférieur ou égal au maximum du nombre de colonnes et de lignes, donc inférieur ou égal à 3. C'est impossible.
   c. Soit $u = (1,0) \in E$, $2u = (2,0) \notin E$ car $2^2 + 0^2 - 2 = 2 \neq 0$ donc E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.

1.
$$A = Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) & u(e_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}$$
2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$
$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow AX = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_4 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - 2x_3 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -(x_3 - 2x_4) - 2x_3 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 + 2x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$
Donc $x = (-3x_3 + 2x_4, x_3 - 2x_4, x_3, x_4\ ) = x_3(-3,1,1,0) + x_4(2,-2,0,1)$
On pose $a = (-3,1,1,0)$ et $b = (2,-2,0,1)$, alors $\ker(u) = vect(a, b)$, comme a et b ne sont pas proportionnels (a, b) est une famille libre et génératrice de $\ker(u)$, c'est une base.
3. D'après le théorème du rang
$$\dim(\ker(u)) + rg(u) = \dim(E)$$

D'après le 2 . $\dim(\ker(u)) = 2$ et $\dim(E) = 4$ donc $rg(u) = \dim\big(Im(u)\big) = 2$

4. $u(e_1)$ et $u(e_2)$ ne sont pas proportionnels, par conséquent $\big(u(e_1), u(e_2)\big)$ est une famille libre à deux éléments dans un espace de dimension 2, c'est une base.
5. Il suffit de montrer que $\big(f_1, u(e_1), u(e_2)\big)$ forment une base de F

$$\det\big(f_1, u(e_1), u(e_2)\big) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Donc $\big(f_1, u(e_1), u(e_2)\big)$ est une base de F et $G \oplus Im(u) = F$

Exercice 2.

1. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$x \in \ker(\phi) \Leftrightarrow \phi(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow AX = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -5x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 4L_2 - L_1 \\ L_3 + 5L_2 \end{matrix} \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Donc $x = (0, -x_3, x_3) = x_3(0, -1, 1)$

$\ker(\phi)$ est donc la droite engendrée par $(0, -1, 1)$ alors $\dim(\ker(\phi)) = 1$

2. $a = (0, -1, 1)$
3. On cherche les vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\phi(x) = a$

$$\phi(x) = a \Leftrightarrow AX = X_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ -5x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 4L_2 - L_1 \\ L_3 + 5L_2 \end{matrix} \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = -4 \\ x_2 + x_3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 = -x_3 - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 3(-x_3 - 4) + 3x_3 = 0 \\ x_2 = -x_3 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -x_3 - 4 \end{cases}$$

On prend par exemple $x_3 = 0$, alors $b = (3, -4, 0)$ convient.

4.

$$E = \{v \in \mathbb{R}^3, \phi(v) = v\} = \{v \in \mathbb{R}^3, \phi(v) - v = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \{v \in \mathbb{R}^3, (\phi - Id_{\mathbb{R}^3})(v) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$
$$= \ker(\phi - Id_{\mathbb{R}^3})$$

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

5.

$$v = (x_1, x_2, x_3) \in E \Leftrightarrow AX_v = X_v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = x_2 \\ -5x_1 - 4x_2 - 4x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ -5x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ -5x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ -5x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = -x_3 \\ -5(-x_3) - 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$v = (-x_3, 0, x_3) = x_3(-1, 0, 1)$$

$c = (-1, 0, 1)$ convient.

6.

$$\lambda a + \mu b + \nu c = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow u(\lambda a + \mu b + \nu c) = u(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda u(a) + \mu u(b) + \nu u(c) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Car u est linéaire

$$\lambda u(a)+\mu u(b)+\nu u(c)=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow \lambda\times 0_{\mathbb{R}^3}+\mu a+\nu c=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow \mu a+\nu c=0_{\mathbb{R}^3}$$

Car $u(a)=0_{\mathbb{R}^3}$, $u(b)=a$ et $u(c)=c$

7.

Première méthode : on montre que (a,b,c) est une famille libre

D'après 6.

$$\lambda a+\mu b+\nu c=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow \mu a+\nu c=0_{\mathbb{R}^3}$$

Or a et c ne sont pas proportionnels donc (a,c) est libre, ce qui entraine que $\mu=\nu=0$

Puis $\lambda a+\mu b+\nu c=0_{\mathbb{R}^3}$ entraine que $\lambda=0$

(a,b,c) est une famille libre à 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base.

$$\det(a,b,c)=\begin{vmatrix}0&3&-1\\-1&-4&0\\1&0&1\end{vmatrix}=-3\times\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}+(-1)\times\begin{vmatrix}-1&-4\\1&0\end{vmatrix}=3-4=-1\neq 0$$

Donc (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$.

8.

$$Mat_{a,b,c}(\phi)=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(a) & u(b) & u(c)\end{array} & \\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}a\\b\\c\end{array}\end{array}$$

Exercice 3.

$$\frac{3X^5-X^3+X}{(X^2-1)^3}=E(X)+\frac{\frac{3}{8}}{(X+1)^3}-\frac{\frac{17}{16}}{(X+1)^2}+\frac{\frac{3}{2}}{X+1}+\frac{a}{(X-1)^3}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X-1}$$

Première méthode : avec l'indication

D'abord, il n'y a pas de partie entière car $d°(3X^5-X^3+X)<d°(X^2-1)^2$ donc $E(X)=0$

On pose

$$F(X)=\frac{3X^5-X^3+X}{(X^2-1)^3}$$

On a bien $F(-X)=-F(X)$, par conséquent

$$\frac{\frac{3}{8}}{(-X+1)^3}-\frac{\frac{17}{16}}{(-X+1)^2}+\frac{\frac{3}{2}}{-X+1}+\frac{a}{(-X-1)^3}+\frac{b}{(-X-1)^2}+\frac{c}{-X-1}$$
$$=-\left(\frac{\frac{3}{8}}{(X+1)^3}-\frac{\frac{17}{16}}{(X+1)^2}+\frac{\frac{3}{2}}{X+1}+\frac{a}{(X-1)^3}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow\frac{-\frac{3}{8}}{(X-1)^3}-\frac{\frac{17}{16}}{(X-1)^2}+\frac{-\frac{3}{2}}{X-1}+\frac{-a}{(X+1)^3}+\frac{b}{(X+1)^2}+\frac{-c}{X+1}$$
$$=\frac{-\frac{3}{8}}{(X+1)^3}+\frac{\frac{17}{16}}{(X+1)^2}+\frac{-\frac{3}{2}}{X+1}+\frac{-a}{(X-1)^3}+\frac{-b}{(X-1)^2}+\frac{-c}{X-1}$$

En identifiant les coefficients on a

$$\begin{cases}-\frac{3}{8}=-a\\-\frac{17}{16}=-b\\-\frac{3}{2}=-c\\-a=-\frac{3}{8}\\b=\frac{17}{16}\\-c=-\frac{3}{2}\end{cases}$$

D'où

$$a = \frac{3}{8}; b = \frac{17}{16} \text{ et } c = \frac{3}{2}$$

Deuxième méthode

$E(X) = 0$ pour les même raisons que dans la première méthode

$$F(X) = \frac{3X^5 - X^3 + X}{(X^2-1)^3} = \frac{3X^5 - X^3 + X}{(X-1)^3(X+1)^3}$$

On multiplie par $(X-1)^3$ puis $X = 1$

$$a = \left[\frac{3X^5 - X^3 + X}{(X+1)^3}\right]_{X=1} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$$

On multiplie par X et $X \to +\infty$

$$3 = \frac{3}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$$

$X = 0$

$$0 = \frac{3}{8} - \frac{17}{16} + \frac{3}{2} - a + b - c \Leftrightarrow b = -\left(\frac{3}{8} - \frac{17}{16} + \frac{3}{2}\right) + a + c = -\frac{3}{8} + \frac{17}{16} - \frac{3}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{2} = \frac{17}{16}$$