Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « sciences et technologie »
Contrôle final
3 juin 2015 durée 2h

Question

1. Soit φ une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F.
   a. Rapppeler la définition du noyau $\ker(\varphi)$ de φ.
   b. Montrer que φ est injective si et seulement si $\ker(\varphi)$.
   c. Enoncé la formule du rang en faisant attention aux hypothèses.
2. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Dans chaque cas, donner une preuve rapide ou un contre-exemple.
   a. Il existe une matrice à 3 lignes et 4 colonnes dont le rang est 2.
   b. Il existe une matrice à 3 lignes et 4 colonnes dont le rang est 4.
   c. La partie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - x = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de respectivement de dimension 3 et 4.. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ une base de F

Soit $u: E \to F$ l'application linéaire définie par

$$u(e_1) = -f_1 + f_3$$
$$u(e_2) = -f_1 + 2f_2 - f_3$$
$$u(e_3) = -2f_1 - 2f_2 + 4f_3$$
$$u(e_4) = 4f_2 - 4f_3$$

1. Donner la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
2. Déterminer une base du noyau $\ker(u)$.
3. En déduire le rang de u.
4. Donner une base de l'image de u.
5. Soit $G = vect(f_1)$ le sous-espace vectoriel de F engendré par f_1. Montrer que $G \oplus Im(u) = F$.

Exercice 2.

Soit $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\dim(\ker(\phi)) = 1$.
2. Donner une base $\mathcal{B} = (a)$ de $\ker(\phi)$.
3. Montrer que $a \in Im(\phi)$ et déterminer un vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $\phi(b) = a$.
4. Montrer que l'ensemble $E = \{v \in \mathbb{R}^3, \phi(v) = v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
5. Donner un vecteur non nul de E.
6. Soient λ, μ et ν trois réels tels que $\lambda a + \mu b + \nu c = 0_{\mathbb{R}^3}$, montrer que $\mu a + \nu c = 0_{\mathbb{R}^3}$.
7. Montrer que (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$.
8. Donner la matrice de ϕ dans la base (a, b, c).

Exercice 3.

Soit X une indéterminée. Déterminer un polynôme réel $E(X)$ et des réels a, b, c tels que :

$$\frac{3X^5 - X^3 + X}{(X^2-1)^3} = E(X) + \frac{\frac{3}{8}}{(X+1)^3} - \frac{\frac{17}{16}}{(X+1)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{X+1} + \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1}$$

On pourra remarquer que la fraction F du membre de gauche est impaire : $F(-X) = -F(X)$