Université Claude Bernard-Lyon 1/Licence sciences et technologie
MAT1009L/Unité d'enseignement « Intégration et approximation »
Contrôle continu final/Mardi 3 Juin/Durée 2heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée, l'utilisation de téléphone portable sera considérée comme tentative de fraude (y compris pour regarder l'heure).

Exercice 1.

On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$

a. Préciser le domaine de définition de f et tracer son graphe.
b. Trouver $\int f(x)dx$. [Indication : on pourra compléter le carré].
c. Calculer $\int_1^2 f(x)dx$.

Exercice 2.

On considère les fonctions numériques f, g définies par

$$f(t) = 3 + \cos^2(t)\,, \quad g(t) = 4\sqrt{\cos(t)}$$

a. Vérifier que ces fonctions sont bien définies au voisinage de 0.
b. Calculer le développement limité de f en 0 et à l'ordre 7.
c. Calculer le développement limité de g en 0 et à l'ordre 4.
d. Prouver que la limite suivante existe et calculer sa valeur :

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(t) - f(t)}{t^4}.$$

Exercice 3.

1. Calculer

$$F(x) = \int \frac{dx}{\frac{1}{2} + \sin^2(x)}$$

A l'aide du changement de variable $t = \tan(x)$.

2. En déduire la valeur de

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\frac{1}{2} + \sin^2(x)}$$

Exercice 4.

1. A l'aide d'une intégration par partie calculer

$$I = \int \frac{1}{t^2} \ln(1 + t^2)\, dt$$

2. Montrer que l'intégrale (impropre)

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \ln(1 + t^2)\, dt$$

Est convergente et trouver sa valeur.

Exercice 5.

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \cos(x) - x^2$

a. Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution dans l'intervalle $]0,1[$. Cette solution sera notée z.

c. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction f entre les points 0 et z, avec reste à l'ordre 4.

d. En déduire que

$$\frac{2}{3} < z^2 < \frac{2}{3} + \frac{1}{36}$$

Correction exercice 1.

a. f est définie si et seulement si $4x - x^2 > 0$, autrement dit si et seulement si $x(4-x) > 0$. Il s'git d'un trinôme du second degré qui est strictement positif si et seulement si x est strictement compris entre ses racines, c'est-à-dire si et seulement si $x \in]0,4[$.

$$f(x) = (4x - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

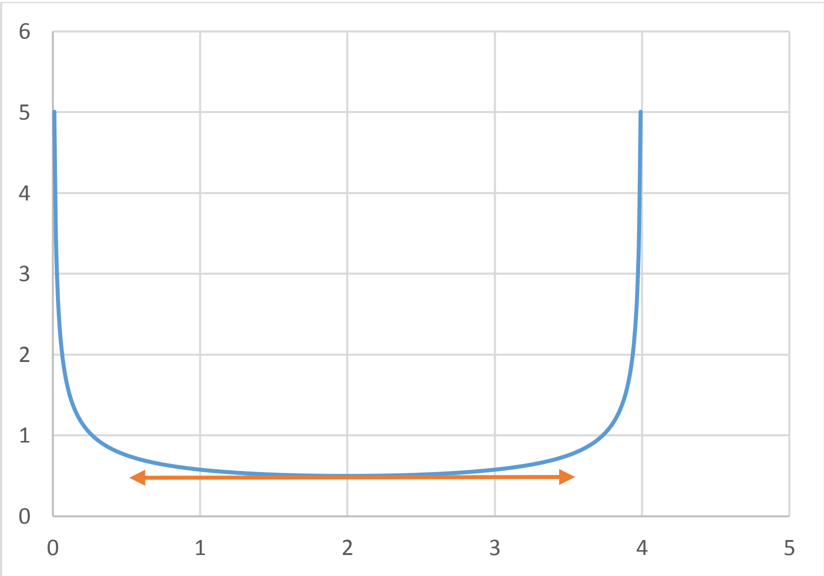
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 4^-} \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} = +\infty$$

Car en 0^+ et 4^-, $4x - x^2 \to 0^+$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(4 - 2x)(4x - x^2)^{-\frac{3}{2}} = -(2 - x)(4x - x^2)^{-\frac{3}{2}} = (x - 2)(4x - x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{x - 2}{(4x - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

La dérivée a le même signe que $x - 2$

$$f(2) = \frac{1}{\sqrt{4 \times 2 - 2^2}} = \frac{1}{2}$$



b. $4x - x^2 = -(x^2 - 4x) = -((x-2)^2 - 4) = 4 - (x-2)^2 = 4\left(1 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2\right)$

On pose $\frac{x-2}{2} = \sin(t)$, autrement dit $x = 2 + 2\sin(t)$, donc $dx = 2\cos(t)\,dt$

$$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to]0,4[$$
$$t \to x = 2 + 2\sin(t)$$

Est une bijection, par conséquent, $\cos(t) > 0$ et alors $|\cos(t)| = \cos(t)$

$$\int f(x)dx = \int \frac{2\cos(t)\,dt}{2\sqrt{1 - \sin^2(t)}} = \int \frac{\cos(t)\,dt}{\sqrt{\cos^2(t)}} = \int \frac{\cos(t)}{|\cos(t)|}dt = \int dt = t + K = 2\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right), K \in \mathbb{R}$$

c.

$$\int_1^2 f(x)dx = \left[\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_1^2 = \arcsin(0) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Correction exercice 2.

a. $t \to \cos^2(t)$ est définie au voisinage de 0 donc f aussi. $\cos(t) \geq 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $t \to \sqrt{\cos(t)}$ est définie sur cette intervalle, donc dans un voisinage de 0, ainsi que g

b.

$$f(t)=3+\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}-\frac{t^6}{720}+o(t^7)\right)\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}-\frac{t^6}{720}+o(t^7)\right)$$
$$=3+1+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)t^2+\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{4}+\frac{1}{24}\right)t^4+\left(-\frac{1}{720}-\frac{1}{48}-\frac{1}{48}-\frac{1}{720}\right)t^6+o(t^7)$$
$$=4-t^2+\frac{8}{24}t^4-\left(\frac{1}{360}+\frac{1}{24}\right)t^6+o(t^7)$$
$$=4-t^2+\frac{1}{3}t^4+\left(\frac{1}{360}+\frac{15}{24\times 15}\right)t^6+o(t^7)=4-t^2+\frac{1}{3}t^4-\frac{16}{360}t^6+o(t^7)=$$
$$=4-t^2+\frac{1}{3}t^4-\frac{2}{45}t^6+o(t^7)$$

c.

$$g(t)=4\sqrt{1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^4)}=4\sqrt{1+X}=4(1+\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{X^2}{2}+o(X^2)$$
$$=4+2X-\frac{X^2}{2}+o(X^2)$$

Avec

$$X=-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^4)$$
$$X^2=\frac{t^4}{4}+o(t^4)$$
$$o(X^2)=o(t^4)$$

Donc

$$g(t)=4+2\left(-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^4)\right)-\frac{\left(\frac{t^4}{4}+o(t^4)\right)}{2}+o(t^4)=4-t^2+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{8}\right)t^4+o(t^4)$$
$$=4-t^2-\frac{1}{24}t^4+o(t^4)$$

d.

$$\frac{g(t)-f(t)}{t^4}=\frac{4-t^2-\frac{1}{24}t^4+o(t^4)-\left(4-t^2+\frac{1}{3}t^4+o(t^4)\right)}{t^4}=\frac{\left(-\frac{1}{24}-\frac{1}{3}\right)t^4+t^4}{t^4}$$
$$=\frac{-\frac{9}{24}t^4+t^4}{t^4}=-\frac{3}{8}+o(1)$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(t)-f(t)}{t^4}=-\frac{3}{8}$$

Correction exercice 3.

a. Première méthode

$$F(x)=\int\frac{dx}{\frac{1}{2}+\sin^2(x)}=\int\frac{1}{\frac{1}{2\cos^2(x)}+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}\frac{dx}{\cos^2(x)}=\int\frac{1}{\frac{1}{2}(1+\tan^2(x))+\tan^2(x)}\frac{dx}{\cos^2(x)}$$
$$=\int\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\tan^2(x)}\frac{dx}{\cos^2(x)}$$

On fait le changement de variable $t=\tan(x)$

$$F(x)=\int\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t^2}dt=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{\frac{1}{3}+t^2}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\sqrt{3}t\right)+K=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}\arctan(x)\right)+K$$

Deuxième méthode

$x=\arctan(t)$ entraine que $dx=\frac{dt}{1+t^2}$

$$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

Donc

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+\sin^2(x)}=\frac{1}{\frac{1}{2}+1-\cos^2(x)}=\frac{1}{\frac{3}{2}-\cos^2(x)}=\frac{1}{\frac{3}{2}-\frac{1}{1+\tan^2(x)}}=\frac{1+\tan^2(x)}{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\tan^2(x)-1}=\frac{1+\tan^2(x)}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\tan^2(x)}$$
$$=\frac{2}{3}\frac{1+t^2}{\frac{1}{3}+t^2}$$

Par conséquent

$$F(x)=\frac{2}{3}\int\frac{1+t^2}{\frac{1}{3}+t^2}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{\frac{1}{3}+t^2}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{\frac{1}{3}+t^2}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\sqrt{3}t\right)+K$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}\arctan(x)\right)+K$$

b.

$$I=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F(0)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}\arctan(0)\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}\right)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\pi}{3}$$

Correction exercice 4.

a.

$$\int\frac{1}{t^2}\ln(1+t^2)\,dt$$

$u'(t)=\frac{1}{t^2}$ $\qquad$ $u(t)=-\frac{1}{t}$

$v(t)=\ln(1+t^2)$ $\qquad$ $v'(t)=\frac{2t}{1+t^2}$

$$\int\frac{1}{t^2}\ln(1-t^2)\,dt=\left[-\frac{1}{t}\ln(1+t^2)\right]\qquad-\int\left(-\frac{1}{t}\right)\frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

Donc

$$\int\frac{1}{t^2}\ln(1+t^2)\,dt=\left[-\frac{1}{t}\ln(1+t^2)\right]+\int\frac{2}{1+t^2}\,dt=-\frac{1}{t}\ln(1+t^2)+2\arctan(t)+K,k\in\mathbb{R}$$

b.

Première méthode

D'après les règles de Riemann, il existe $\alpha=\frac{3}{2}>1$ tel que

$$\frac{t^3}{2}\times\frac{\ln(1+t^2)}{t^2}=\frac{\ln(1+t^2)}{t^{\frac{1}{2}}}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$$

Donc l'intégrale est convergente, mais on ne connait pas sa valeur

Deuxième méthode

$$\int_1^X\frac{1}{t^2}\ln(1+t^2)\,dt=\left[-\frac{1}{t}\ln(1+t^2)+2\arctan(t)\right]_1^X$$
$$=-\frac{\ln(1+X^2)}{X}+2\arctan(X)-(-\ln(1+1^2)+2\arctan(1))$$
$$=-\frac{\ln(1+X^2)}{X}+2\arctan(X)+\ln(2)-\frac{\pi}{2}\xrightarrow[X\to+\infty]{}2\times\frac{\pi}{2}+\ln(2)-2\times\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\pi}{2}+\ln(2)$$

Par conséquent l'intégrale converge et $J=\frac{\pi}{2}+\ln(2)$

Correction exercice 5.

a. $f'(x) = -\sin(x) - 2x$ et $f''(x) = -\cos(x) - 2 < 0$, ce qui signifie que f' est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, comme $f'(0) = 0$, on a pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$, par conséquent f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ donc sur $[0, +\infty[$.

b. $f(0) = 1$ et $f(1) = \cos(1) - 1 < 0$, comme f est continue, f est une bijection décroissante de $]0,1[$ sur $]1 - \cos(1)\,, 1[$. $0 \in\,]1 - \cos(1)\,, 1[$ admet un unique antécédent $z \in\,]0,1[$.

c. f est C^∞, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre, il existe $c \in\,]0, z[$ tel que :

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + f''(0)\frac{z^2}{2} + f^{(3)}(0)\frac{z^3}{6} + f^{(4)}(0)\frac{z^4}{24}$$

$$f(x) = \cos(x) - x^2 \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin(x) - 2x \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos(x) - 2 \Rightarrow f''(0) = -3$$

$$f^{(3)}x) = \sin(x) \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(4)}(c) = \cos(c)$$

D'autre part $f(z) = 0$

D'où l'on déduit que

$$0 = 1 - 3\frac{z^2}{2} + \cos(c)\frac{z^4}{24}$$

Par conséquent

$$z^2 = \frac{2}{3}\left(1 + \cos(c)\frac{z^4}{24}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{36}z^4\cos(c)$$

$$c \in\,]0, z[\, \subset\,]0,1[\, \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

On a $0 < \cos(c) < 1$

Donc

$$0 < \frac{1}{36}z^4\cos(c) < \frac{1}{36}z^4 < \frac{1}{36}$$

Puis en ajoutant $\frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3} < z^2 < \frac{2}{3} + \frac{1}{36}$$