Université Claude Bernard-Lyon 1/ Licence sciences et technologie
MAT1009L/ Unité d'enseignement :
Analyse II « Intégration et approximation »
Contrôle continu final/ Mercredi 12 Juin 2013/ Durée 2 heures

Identifier sur votre copie votre <u>Parcours</u> (Math, Info, MASS ou cursus préparatoire), ainsi que votre nom et votre numéro d'étudiant,

Les exercices suivants sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toutes nature et de calculettes n'est pas autorisée, l'utilisation de téléphone sera considérée comme une tentative de fraude (y compris pour regarder l'heure).

Le sujet comprend six exercices.

Exercice 1.

a) Rappeler la valeur du nombre $\cosh^2(y) - \sinh^2(y)$, avec $y \in \mathbb{R}$.

b) Si $\cosh(y) = \frac{5}{4}$, quelles sont les valeurs possibles de $\sinh(y)$?

c) Résoudre l'équation $\cosh(y) = \frac{5}{4}$.

d) Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \cosh(y) = \dfrac{5}{4} \\ \sinh(y) = \dfrac{3}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cosh(y) = \dfrac{5}{4} \\ \sinh(y) = \dfrac{-2}{3} \end{cases}$$

e) Montrer l'identité $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

f) En déduire une formule plus simple de l'expression

$$f(x) = \frac{5}{4}\sinh(x) + \frac{3}{4}\cosh(x), \qquad \text{avec} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Correction exercice 1.

a) Pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$$

b) D'après a)

$$\sinh^2(y) = \cosh^2(y) - 1$$

Donc si $\cosh(y) = \frac{5}{4}$ alors

$$\sinh^2(y) = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1 = \frac{25}{16} - 1 = \frac{25 - 16}{16} = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Par conséquent

$$\sinh(y) = -\frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad \sinh(y) = \frac{3}{4}$$

c)

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \cosh(y) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow e^y + \frac{1}{e^y} = \frac{5}{2}$$

On pose $Y = e^y$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \cosh(y) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow Y + \frac{1}{Y} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow Y^2 + 1 = \frac{5}{2}Y \Leftrightarrow Y^2 - \frac{5}{2}Y + 1 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré est

$$\Delta = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 4 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{25 - 16}{4} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Cette équation admet donc deux solutions

$$Y_1=\frac{-\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{3}{2}}{2}=\frac{1}{2}\qquad \text{et}\qquad Y_2=\frac{-\left(-\frac{5}{2}\right)+\frac{3}{2}}{2}=2$$

$\cosh(y)=\frac{5}{4}$ admet donc deux solutions y_1 et y_2 telles que

$$e^{y_1}=\frac{1}{2}\qquad \text{et}\qquad e^{y_2}=2$$

Ce qui équivaut à $y_1=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)$ et $y_2=\ln(2)$

d)

$$\begin{cases}\cosh(y)=\frac{5}{4}\\ \sinh(y)=\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\ln(2)\quad \text{ou}\quad y=\ln(2)\\ \sinh(y)=\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\ln(2)\\ \sinh(y)=\frac{3}{4}\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}y=\ln(2)\\ \sinh(y)=\frac{3}{4}\end{cases}$$

Le premier système n'a pas de solution car $y<0$ entraine que $\sinh(y)<0$

Par conséquent

$$\begin{cases}\cosh(y)=\frac{5}{4}\\ \sinh(y)=\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\ln(2)\\ \sinh(y)=\frac{3}{4}\end{cases}$$

Première méthode

Comme

$$\cosh(y)=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\sinh(y)=\pm\frac{3}{4}$$

On a

$$\begin{cases}\cosh(y)=\frac{5}{4}\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow\sinh(y)=\frac{3}{4}$$

Or

$$\begin{cases}\cosh(y)=\frac{5}{4}\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow y=\ln(2)$$

Donc

$$\begin{cases}\cosh(y)=\frac{5}{4}\\ \sinh(y)=\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow y=\ln(2)$$

Deuxième méthode

$$\sinh(\ln(2))=\frac{e^{\ln(2)}-e^{-\ln(2)}}{2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

Finalement il n'y a qu'une solution $y=\ln(2)$

e)

$$\begin{aligned}\sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y)&=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\times\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}\times\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\&=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y}}{4}+\frac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-x-y}}{4}\\&=\frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{4}+\frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{4}=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\sinh(x+y)\end{aligned}$$

f)

$$f(x)=\frac{5}{4}\sinh(x)+\frac{3}{4}\cosh(x)=\cosh(\ln(2))\sinh(x)+\sinh(\ln(2))\cosh(x)=\sinh(\ln(2)+x)$$

Exercice 2.

a) Trouver la solution générale y de l'équation différentielle

$$y''(t) + y(t) = kt \qquad (*)$$

Où k est un paramètre réel.

b) Sachant que parmi les solutions de $(*)$ trouvées dans la partie a) il en existe une telle que $y(0) = 0$ et $y(2\pi) = 1$, déterminer la valeur de k.

Correction exercice 2.

a) La solution générale de l'équation homogène $y''(t) + y(t) = 0$ est

$$y(t) = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Il existe une solution particulière de $(*)$ de la forme $y_P(t) = At + B$, comme $y_P''(t) = 0$

$$y_P''(t) + y_P(t) = kt \Leftrightarrow At + B = kt \Leftrightarrow \begin{cases} A = k \\ B = 0 \end{cases}$$

Donc $y_P(t) = kt$ et la solution générale de $(*)$ est :

$$y(t) = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) + kt, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

b)

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(2\pi) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda + 2k\pi = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ k = \dfrac{1}{2\pi} \end{cases}$$

Exercice 3.

Calculer la primitive suivante :

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx, \qquad x \in]1, +\infty[$$

En faisant le changement de variable $x = 1 + t^2$. $(t > 0)$

Correction exercice 3.

$dx = 2tdt$ et $\sqrt{x-1} = \sqrt{t^2} = |t|$, on prend $t > 0$, donc $t = \sqrt{x-1}$

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx = \int \frac{t}{1+t^2} 2tdt = 2\int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$$= 2t - 2\arctan(t) + K = 2\sqrt{x-1} - 2\arctan\left(\sqrt{x-1}\right), \quad K \in \mathbb{R}$$

Exercice 4.

Pour tout $n \geq 0$ un entier, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\, dx$$

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Montrer que $\tan^2(x) = \tan'(x) - 1$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

c) En déduire une expression de I_{n+2} en fonction de I_n.

d) Calculer I_2 et I_3.

Correction exercice 4.

a)

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^0(x)\, dx \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = [-\ln|\cos(x)|]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| + \ln|\cos(0)|$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \ln(1) = -\ln\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

b) $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ d'où le résultat.

c)

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2}(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) \tan^2(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) \left(\tan'(x) - 1\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) \tan'(x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\, dx = \left[\frac{\tan^{n+1}(x)}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_n$$

$$= \frac{\tan^{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{n+1} - \frac{\tan^{n+1}(0)}{n+1} - I_n = \frac{1}{n+1} - I_n$$

d) En appliquant la relation ci-dessus pour $n = 0$.

$$I_2 = \frac{1}{0+1} - I_0 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

En appliquant la formule ci-dessus pour $n = 1$

$$I_3 = \frac{1}{1+1} - I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2)$$

Exercice 5.

Soit f la fonction donnée par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \qquad -1 < x < 1$$

a) Calculer $f'(x)$.
b) Donner le développement limité à l'ordre 3,4,5 et 6 de $f'(x)$ en $x = 0$.
c) En déduire le développement limité de f à l'ordre 4 en $x = 0$.

Correction exercice 5.

a)

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

b) On applique la formule

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - \cdots + (-1)^n X^n + o(X^n)$$

Avec $X = -x^2$, et en utilisant la parité de $f'(x)$ pour « gagner » un ordre

A l'ordre 3 :

$$f'(x) = 2\left(1 + x^2 + o(x^3)\right) = 2 + 2x^2 + o(x^3)$$

A l'ordre 4 :

$$f'(x) = 2\left(1 + x^2 + x^4 + o(x^4)\right) = 2 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)$$

A l'ordre 5 :

$$f'(x) = 2\left(1 + x^2 + x^4 + o(x^5)\right) = 2 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^5)$$

A l'ordre 6 :

$$f'(x) = 2\left(1 + x^2 + x^4 + x^6 + o(x^6)\right) = 2 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + o(x^6)$$

c) On utilise le développement limité à l'ordre 3 de $f'(x)$, que l'on intègre

$$f(x) = f(0) + 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$$

Exercice 6.

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \ln(x^2) \ln(1+x)$$

Correction exercice 6.

$$\ln(x^2)\ln(1+x) = 2\ln|x|\ln(1+x) = 2\ln|x|\left(x + o(x)\right) \sim 2x\ln|x| \to 0$$

Puisque le « x » l'emporte sur le logarithme.