

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Questionnaire

1. Vrai ou faux ? La matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

est inversible (justifier brièvement) ?

2. Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de l'espace vectoriel de \mathbb{R}^5 et P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . On note M et M' les matrices d'un endomorphisme de \mathbb{R}^5 associé à \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Exprimer M en fonction de M' et P .
3. Factoriser le polynôme $X^4 + 1$ dans l'anneau des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{X^3}{X^2+1}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 1.

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On pose

$$P_1 = X^2 + X, \quad P_2 = X^2 - X, \quad P_3 = X^2 - 1$$

1. Rappeler la dimension de E .
- 2.
- a. Exprimer $1, X$ et X^2 comme des combinaisons linéaires de P_1, P_2 et P_3 . En déduire que la famille $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E .
- b. Ecrire la matrice de passage de la base (P_1, P_2, P_3) à la base $(1, X, X^2)$.
- c. Déterminer les coordonnées dans la base (P_1, P_2, P_3) des vecteurs suivants :
- $$Q_1 = 1, \quad Q_2 = X - 2, \quad Q_3 = X^2 - 2X$$
- d. Démontrer rapidement que $\mathcal{C} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto P(2) \end{aligned}$$

On admet qu'elle est linéaire. On munit l'espace vectoriel \mathbb{R} de la base $\mathcal{D} = (1)$

- a. Déterminer la matrice de φ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{D} , puis dans les bases \mathcal{C} et \mathcal{D} .
- b. Déterminer le rang de φ , l'image de φ et le noyau de φ .

Exercice 2.

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , on note

$$f_1 = (2, 1, -1), \quad f_2 = (3, 2, 0), \quad f_3 = (1, 0, -1)$$

On note $D = \text{Vect}(f_1)$ et $E = \text{Vect}(f_2, f_3)$

- 1.
- a. Quelle la dimension de E ?
- b. A quelle condition un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartient-il à E ?
- 2.
- a. Montrer que D et E sont supplémentaires, c'est-à-dire si $\mathbb{R}^3 = D \oplus E$
- b. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
3. Soit P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Justifier que P est inversible et calculer son inverse.

b. Soit $v = (x_1, x_2, x_3)$ un vecteur de \mathbb{R}^3 . Exprimer les coordonnées $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ de v dans la base

(f_1, f_2, f_3) .

4. Soit $v \in \mathbb{R}^3$. D'après la question 2a, on peut trouver $v_1 \in D$ et $v_0 \in E$ uniques tels que $v = v_1 + v_0$. On pose alors $p(v) = v_1$.

a. Montrer que p est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .

b. Ecrire la matrice M' de p dans la base (f_1, f_2, f_3) .

c. Soit $v \in \mathbb{R}^3$ et soient $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base (f_1, f_2, f_3) , montrer que l'on a :

$$p(v) = x'_1 f_1$$

5. (Bonus) Déterminer la matrice M de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .