Contrôle continu final-lundi 11 Juin 2012

Durée : 2 heures

Les documents, calculatrices *et téléphones portables* sont interdits.
Une grande importance sera accordée à la précision de la rédaction.
L'énoncé comporte deux pages.
Il n'est pas nécessaire de traiter l'intégralité du sujet pour obtenir la note maximale.

Question de cours

Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F.

1. Rappelez la définition du noyau $\ker(u)$ de u.
2. Montrer que u est injective si et seulement si $\ker(u) = \{0_E\}$

Exercice 1.

1. Montrer que le polynôme $P = X^4 - 15X^2 - 10X + 24$ est divisible par $X^2 + 2X - 3$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Donner la décomposition de P en produit de facteurs de degré 1 dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Soient p, q et r trois réels et α, β, γ et δ les quatre racines du polynôme $Q = X^3 + pX^2 + qX + r$.
   a) On pose $S_1 = \alpha + \beta + \gamma$ et $S_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$
   [On pourra reconnaître et développer $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$.]
   Calculer S_1 et S_2 en fonction de p, q et r.
   b) On pose enfin : $T = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. Calculer T en fonction de p, q et r.

Exercice 2.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ respectivement de dimension 3 et 4. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ une base de F.

Soit u une application linéaire définie par

$$u(e_1) = f_1 - 2f_2 + f_3$$
$$u(e_2) = f_2 - 2f_3 + f_4$$
$$u(e_3) = -f_1 + f_2 + f_3 - f_4$$

1. Donner la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$.
3. En déduire le rang de u.
4. Donner une base de $Im(u)$.
5. Soit $G = Vect(f_1, f_4)$ le sous-espace vectoriel de F engendré par f_1 et f_4. Montrer que G est un supplémentaire de $Im(u)$.

Exercice 3.

Soit $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Montrer que $\dim(\ker(\varphi)) = 1$ et donner une base $\mathcal{B} = (a)$ de $\ker(\varphi)$.
2. Montrer que $a \in Im(u)$, c'est-à-dire qu'il existe $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(b) = a$.
3. Montrer que l'ensemble $E = \{v \in \mathbb{R}^3, \phi(v) = v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Donner un vecteur c non nul de E.

5. Montrer que (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Donner la matrice de u dans la base (a, b, c).

Exercice 4.

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez brièvement votre réponse.

1. Pour tout $n \geq 2$ et pour toutes matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a l'identité
$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$
2. Soit A une matrice carrée inversible. Alors $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.
3. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible.
4. L'application $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $u(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 0\right)$ est linéaire.
5. Le sous-ensemble E de $\mathbb{R}^3$ défini par $e = \{(x, y, z), 2x + 3y + 5z = 1\}$ est un sous-espace vectoriel.
6. Il existe une matrice A à 4 lignes et 3 colonnes dont le rang de A est 4.
7. Il existe une matrice A à 4 lignes et 3 colonnes dont le rang de A est 2.