Université Claude Bernard-Lyon 1

Licence « sciences et technologie »

Unité d'enseignement « analyse II »

Contrôle continu final

Mercredi 15 JUIN 2011-Durée 2 heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée, l'utilisation de téléphone sera considéré comme une tentative de fraude(Y compris pour regarder l'heure). Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso).

Exercice 1 :

1°) Soit $t \geq 0$, écrire la formule de Taylor-Lagrange de la fonction sin entre 0 et t, avec un reste à l'ordre 5.

2°) En déduire que $\frac{17}{18}$ est une valeur approchée de

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$$

à 2×10^{-3} près.

Correction

1°) Pour $t > 0$ il existe $c \in]0, t[$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120}\cos(c)$$

Pour $t = 0$, $\sin(0) = 0$ et on retrouve la même formule.

2°) $c \in]0, t[$ entraine que $c \in]0,1[\subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $0 < \cos(c) < 1$

$$0 < \frac{t^5}{120}\cos(c) < \frac{t^5}{120} \Leftrightarrow t - \frac{t^3}{6} < t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120}\cos(c) < t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} \Leftrightarrow 1 - \frac{t^2}{6} < \frac{\sin(t)}{t} < 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120}$$

En intégrant entre 0 et 1

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{t^2}{6}\right) dt < \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt < \int_0^1 \left(1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120}\right) dt \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{18} < \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt < 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600}$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{18} < \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt < \frac{17}{18} + \frac{1}{600}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt - \frac{17}{18} < \frac{1}{600} < \frac{1}{500} = 2 \times 10^{-3}$$

Donc $\frac{17}{18}$ est une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ à 2×10^{-3} près.

Exercice 2 :

Soient a, b et c trois réels.

1°) Calculer le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(1 + ax) + \sin(bx) + cx^2$$

2°) Sachant que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)}{x^3} = 4$$

Trouver a, b et c.

Correction

1°)

$$f(x) = ax - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^3x^3}{3} + o(x^3) + bx - \frac{b^3x^3}{6} + o(x^3) + cx^2$$
$$= (a+b)x + \left(c - \frac{a^2}{2}\right)x^2 + \frac{2a^3 - b^3}{6}x^3 + o(x^3)$$

2°)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)}{x^2} = 0 \quad et \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)}{x^3} = 4$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{(a+b)x + \left(c - \frac{a^2}{2}\right)x^2 + \frac{2a^3-b^3}{6}x^3 + o(x^3)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left(\frac{a+b}{x} + c - \frac{a^2}{2} + \frac{2a^3-b^3}{6}x + o(x)\right) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left(\frac{a+b}{x^2} + \frac{c - \frac{a^2}{2}}{x} + \frac{2a^3-b^3}{6} + o(1)\right) = 4$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c - \dfrac{a^2}{2} = 0 \\ \dfrac{2a^3-b^3}{6} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = \dfrac{a^2}{2} \\ \dfrac{3a^3}{6} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 2 \\ a = 2 \end{cases}$$

Exercice 3 :

Soient $f: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ et $g: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, f une fonction continue, g une fonction de classe C^1 et telles que pour tout $u \in [0, +\infty[$

$$g'(u) \leq f(u)g(u)$$

On pose, pour tout $t \geq 0$

$$\varphi(t) = g(0) + \int_0^t f(u)g(u)du \qquad \text{et} \qquad \psi(t) = \varphi(t)e^{-\int_0^t f(u)du}$$

1°) Montrer que pour tout $t \geq 0$

$$g(t) \leq \varphi(t)$$

2°) En déduire que pour tout $t \geq 0$

$$\varphi'(t) - f(t)\varphi(t) \leq 0$$

3°) Montrer que ψ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

4°) En déduire que pour tout $t \geq 0$

$$\varphi(t) \leq g(0)e^{-\int_0^t f(u)du}$$

5°) En déduire que pour tout $t \geq 0$

$$g(t) \leq g(0)e^{-\int_0^t f(u)du}$$

Correction

1°) g' est continue et $f \times g$ est continue, ces deux fonctions sont donc intégrables. Pour tout $t \geq 0$

$$\int_0^t g'(u)du \leq \int_0^t f(u)g(u)du \Leftrightarrow g(t) - g(0) \leq \int_0^t f(u)g(u)du \Leftrightarrow g(t) \leq g(0) + \int_0^t f(u)g(u)du \Leftrightarrow g(t) \leq \varphi(t)$$

2°) $t \to \int_0^t f(u)g(u)du$ est dérivable car $f \times g$ est continue donc φ est dérivable.
Pour tout $t \geq 0$ on a :

$$\varphi'(t) - f(t)\varphi(t) = f(t)g(t) - f(t)\varphi(t) = f(t)\big(g(t) - \varphi(t)\big) \leq 0$$

Car pour tout $t \geq 0$, $f(t) \geq 0$ et $g(t) \leq \varphi(t)$.
3°) $t \to \int_0^t f(u)du$ est dérivable car f est continue donc $t \to e^{-\int_0^t f(u)du}$ est dérivable, comme φ est dérivable, ψ est dérivable.
Pour tout $t \geq 0$ on a :

$$\psi'(t) = \varphi'(t)e^{-\int_0^t f(u)du} + \varphi(t)\big(-f(t)\big)e^{-\int_0^t f(u)du} = \big(\varphi'(t) - \varphi(t)f(t)\big)e^{-\int_0^t f(u)du} \leq 0$$

ψ est une fonction dérivable, à dérivée négative sur l'intervalle $[0, +\infty[$, ψ est décroissante.
4°) D'après 3.

$$t \geq 0 \Rightarrow \psi(t) \leq \psi(0)$$

$$\psi(0) = \varphi(0)e^{-\int_0^0 f(u)du} = \varphi(0) = g(0) + \int_0^0 f(u)g(u)du = g(0)$$

Donc

$$\varphi(t)e^{-\int_0^t f(u)du} \leq g(0)$$

Ce qui entraine que

$$\varphi(t) \leq g(0)e^{\int_0^t f(u)du}$$

5°) D'après 1. pour tout $t \geq 0$ on a : $g(t) \leq \varphi(t)$
Donc

$$g(t) \leq g(0)e^{\int_0^t f(u)du}$$

Exercice 4 :
Soit

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1 + e^t} dt$$

On pose

$$J_n(X) = \int_0^{X} \frac{e^{-nt}}{1 + e^t} dt$$

On rappelle que

$$\lim_{X \to +\infty} J_n(X) = J_n$$

1°) Montrer que pour tout $n \geq 0$, J_n est une intégrale convergente et strictement positive.
2°) Calculer $J_0(X)$ et $J_1(X)$ et en déduire J_0 et J_1.
3°) Pour tout $n \geq 1$, calculer $J_{n-1}(X) + J_n(X)$.
4°) En déduire J_4.
Correction
1°) Convergence en $+\infty$

$$0 < \frac{e^{-nt}}{1 + e^t} < \frac{1}{1 + e^t} < \frac{1}{e^t} = e^{-t}$$

Comme $t \to e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$ $t \to \frac{e^{-nt}}{1+e^t}$ est intégrable en $+\infty$, de plus l'intégrale d'une fonction strictement positive entre 0 et $+\infty$ est strictement positive.
Si on veut démontrer le fait que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+e^t} dt$ est strictement positive d'une façon plus rigoureuse, on peut raisonner ainsi :

$$\frac{e^{-nt}}{1 + e^t} \geq 0 \Rightarrow \int_0^X \frac{e^{-nt}}{1 + e^t} dt \geq 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1 + e^t} dt = \lim_{X \to 0} \int_0^X \frac{e^{-nt}}{1 + e^t} dt \geq 0$$

ensuite on suppose que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+e^t}dt = 0$$

comme

$$g: X \to \int_0^X \frac{e^{-nt}}{1+e^t}dt$$

est une fonction strictement croissante ($g'(X) = \frac{e^{-nX}}{1+e^X} > 0$, sa dérivée est strictement positive) dont la limite en $+\infty$ est nulle, cette fonction est identiquement nulle donc

$$\forall X \in \mathbb{R}^+, \int_0^X \frac{e^{-nt}}{1+e^t}dt$$

ce qui entraine que sa dérivée est nulle, c'est-à-dire que $\forall X \in \mathbb{R}^+, \frac{e^{-nX}}{1+e^X} = 0$, ce qui est faux donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+e^t}dt = 0$$

est faux et

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+e^t}dt > 0$$

2°)

$$J_0 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}dt = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{1}{1+e^t}dt$$

On fait le changement de variable $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln(x)$ donc $dt = \frac{dx}{x}$

$$t = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$$
$$t = X \Rightarrow x = e^X$$

$$J_0(X) = \int_0^X \frac{1}{1+e^t}dt = \int_1^{e^X} \frac{1}{1+x}\frac{dx}{x}$$

Il existe a et b réels tels que

$$\frac{1}{(x+1)x} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x}$$

On multiplie par $x+1$, puis $x = -1$

$$a = \left[\frac{1}{x}\right]_{x=-1} = -1$$

On multiplie par x, puis $x = 0$

$$b = \left[\frac{1}{x+1}\right]_{x=0} = 1$$

$$J_0(X) = \int_0^X \frac{1}{1+e^t}dt = \int_1^{e^X} \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x}\right)dx \; = [-\ln(x+1) + \ln(x)]_{x=1}^{x=e^X}$$

$$= -\ln(e^X+1) + \ln(e^X) - (-\ln(2) + \ln(1)) = -\ln\left(\frac{e^X+1}{e^X}\right) + \ln(2) =$$

$$= -\ln\left(\frac{e^X+1}{e^X}\right) + \ln(2) = -\ln(1+e^{-X}) + \ln(2)$$

$$J_0 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}dt = \lim_{X\to+\infty}(-\ln(1+e^{-X}) + \ln(2)) = \ln(2)$$

$$J_1=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+e^t}dt=\lim_{X\to+\infty}\int_0^X\frac{e^{-t}}{1+e^t}dt$$

On fait le changement de variable $x=e^t\Leftrightarrow t=\ln(x)$ donc $dt=\frac{dx}{x}$

$$t=0\Rightarrow x=e^0=1$$

$$t=X\Rightarrow x=e^X$$

$$J_1(X)=\int_0^X\frac{e^{-t}}{1+e^t}dt=\int_1^{e^X}\frac{\frac{1}{x}}{1+x}\frac{dx}{x}=\int_1^{e^X}\frac{1}{(1+x)x^2}dx$$

Il existe a, b et c réels tels que

$$\frac{1}{(1+x)x^2}=\frac{a}{1+x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$$

On multiplie par $x+1$, puis $x=-1$

$$a=\left[\frac{1}{x^2}\right]_{x=-1}=1$$

On multiplie par x^2 puis $x=0$

$$c=\left[\frac{1}{x+1}\right]_{x=0}=1$$

On multiplie par x puis $x\to+\infty$

$$0=a+b\Leftrightarrow b=-1$$

$$J_1(X)=\int_0^X\frac{e^{-t}}{1+e^t}dt=\int_1^{e^X}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\ln(x+1)-\ln(x)-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=e^X}$$

$$=\ln(e^X+1)-\ln(e^X)-e^{-X}-(\ln(2)-\ln(1)-1)=\ln\left(\frac{e^X+1}{e^X}\right)-e^{-X}-\ln(2)+1$$

$$=\ln(1+e^{-X})-e^{-X}-\ln(2)+1$$

$$J_1=\lim_{X\to+\infty}(\ln(1+e^{-X})-e^{-X}-\ln(2)+1)=1-\ln(2)$$

3°)

$$J_{n-1}(X)+J_n(X)=\int_0^X\frac{e^{-(n-1)t}}{1+e^t}dt+\int_0^X\frac{e^{-nt}}{1+e^t}dt=\int_0^X\frac{e^{-(n-1)t}+e^{-nt}}{1+e^t}dt=\int_0^X\frac{(e^t+1)e^{-nt}}{1+e^t}dt$$

$$=\int_0^X e^{-nt}dt=\left[-\frac{e^{-nt}}{n}\right]_{t=0}^{t=X}=-\frac{e^{-nX}}{n}+\frac{1}{n}$$

Donc

$$J_{n-1}+J_n=\frac{1}{n}$$

4°)

$$J_4=\frac{1}{4}-J_3=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{3}-J_2\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+J_2=-\frac{1}{12}+\frac{1}{2}-J_1=\frac{5}{12}-(1-\ln(2))=-\frac{7}{12}+\ln(2)$$