Université Claude Bernard-Lyon 1

Licence « sciences et technologie »

Unité d'enseignement « analyse II »

Contrôle continu final

Mercredi 15 JUIN 2011-Durée 2 heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée, l'utilisation de téléphone sera considéré comme une tentative de fraude (Y compris pour regarder l'heure). Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso).

Exercice 1 :
1°) Soit $t \geq 0$, écrire la formule de Taylor-Lagrange de la fonction sin entre 0 et t, avec un reste à l'ordre 5.
2°) En déduire que $\frac{17}{18}$ est une valeur approchée de

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$$

à 2×10^{-3} près.

Exercice 2 :
Soient a, b et c trois réels.
1°) Calculer le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(1 + ax) + \sin(bx) + cx^2$$

2°) Sachant que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x)}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x)}{x^3} = 4$$

Trouver a, b et c.

Exercice 3 :
Soient $f: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ et $g: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, f une fonction continue, g une fonction de classe C^1 et telles que pour tout $u \in [0, +\infty[$

$$g'(u) \leq f(u)g(u)$$

On pose, pour tout $t \geq 0$

$$\varphi(t) = g(0) + \int_0^t f(u)g(u)du \quad \text{et} \quad \psi(t) = \varphi(t)e^{-\int_0^t f(u)du}$$

1°) Montrer que pour tout $t \geq 0$

$$g(t) \leq \varphi(t)$$

2°) En déduire que pour tout $t \geq 0$

$$\varphi'(t) - f(t)\varphi(t) \leq 0$$

3°) Montrer que ψ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
4°) En déduire que pour tout $t \geq 0$

$$\varphi(t) \leq g(0)e^{-\int_0^t f(u)du}$$

5°) En déduire que pour tout $t \geq 0$

$$g(t) \leq g(0)e^{-\int_0^t f(u)du}$$

Exercice 4 :

Soit

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+e^t} dt$$

On pose

$$J_n(X) = \int_0^{X} \frac{e^{-nt}}{1+e^t} dt$$

On rappelle que

$$\lim_{X \to +\infty} J_n(X) = J_n$$

1°) Montrer que pour tout $n \geq 0$, J_n est une intégrale convergente et strictement positive.

2°) Calculer $J_0(X)$ et $J_1(X)$ et en déduire J_0 et J_1.

3°) Pour tout $n \geq 1$, calculer $J_{n-1}(X) + J_n(X)$.

4°) En déduire J_4.