Math II algèbre Juin 2011

Problème

Partie I.

On fixe un réel a et on considère l'application

$$u: \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$$
$$P \to P - \frac{1}{3}(X-a)P'$$

Où $\mathbb{R}_3[X]$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que l'image d'un élément de P de $\mathbb{R}_3[X]$ appartient bien à $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que l'application u est linéaire.
3. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
4. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (1, X-a, (X-a)^2, (X-a)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
5. Calculer pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$, $u((X-a)^k)$ les coordonnées de $u((X-a)^k)$ dans la base $\mathcal{B}'$. En déduire la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$.
6. Déterminer une base de $\ker(u)$, une base de $Im(u)$ et le rang de u.
   [On pourra utiliser la matrice D.]

Allez à : Correction partie I

Partie II.

Soit P, un polynôme de degré 3 à coefficients réels tel que P' divise P.

7. Montrer qu'il existe α et β réels tels que
$$P = (\alpha X + \beta)P'$$
8. Montrer qu'il existe un réel a tel que
$$P = \frac{1}{3}(X-a)P'$$
9. En déduire tous les polynômes de degré 3 tels que P' divise P.
   [On pourra utiliser l'endomorphisme de la première partie]

Allez à : Correction partie II

Partie III.

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes tel que P' divise P.

10. Démontrer qu'il existe un complexes a tel que $P = \frac{1}{n}(X-a)P'$.
11. Soient $a_1, \dots, a_r$ des complexes deux à deux distincts et $m_1, \dots, m_r$ des entiers naturels non nuls. On considère le polynôme :
$$Q = \prod_{k=1}^{r}(X-a_k)^{m_k}$$
    Calculer Q' et en déduire la décomposition en éléments simple de $\frac{Q'}{Q}$
12. En déduire que P n'a qu'une seule racine.

Allez à : Correction partie III

Questionnaire

Les différentes questions sont indépendantes.

1. Soit n un entier naturel non nul et A la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients valent 1 :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
   Déterminer le rang de A et en déduire le déterminant de A.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et φ un endomorphisme de E, c'est-à-dire une application linéaire de E dans E.
   (a) Donner sans preuve la relation entre $\dim(E)$, $\dim(\ker(f))$ et $rg(f)$.
   (b) Démontrer que φ est injective si, et seulement si φ est surjective.
3. Donner la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle
$$F=\frac{1}{X(X-1)^2}$$
4. Soit n un entier naturel non nul et $A=\left(a_{i,j}\right)_{1\leq i\leq j\leq n}$ une matrice $n\times n$ à coefficients complexes. On suppose que pour i et j entiers compris entre 1 et n, on a :
$$a_{i,i}\neq 0 \quad \text{et} \quad i<j\Rightarrow a_{i,i}=0$$
   C'est-à-dire
$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$
   Démontrer que A est inversible.

Allez à : Correction questionnaire

CORRECTION

Problème

Correction partie I.

1. $d°P\leq 3\Rightarrow d°\big((X-a)P'\big)\leq 3\Rightarrow d°u(P)\leq 3$ donc l'image d'un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ par u est un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soient P_1,P_2 deux polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ et λ_1 et λ_2 deux réels
$$\begin{aligned} u(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)&=(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)'-\frac{1}{3}(X-a)(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)\\ &=(\lambda_1P_1'+\lambda_2P_2')-\lambda_1\frac{1}{3}(X-a)P_1-\lambda_2\frac{1}{3}(X-a)P_2\\ &=\lambda_1\left(P_1'-\frac{1}{3}(X-a)P_1\right)+\lambda_2\left(P_2'-\frac{1}{3}(X-a)P_2'\right)=\lambda_1u(P_1)+\lambda_2u(P_2)\end{aligned}$$
u est une application linéaire.
3.
$$u(1)=1-\frac{1}{3}(X-a)\times 0=1$$
$$u(X)=X-\frac{1}{3}(X-a)\times 1=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}X$$
$$u(X^2)=X^2-\frac{1}{3}(X-a)\times 2X=\frac{2a}{3}X+\frac{1}{3}X^2$$
$$u(X^3)=X^3-\frac{1}{3}(X-a)\times 3X^2=aX^2$$
   Donc
$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2a}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
4. Première méthode

$$\begin{aligned}&\alpha+\beta(X-a)+\gamma(X-a)^2+\delta(X-a)^3=0\\&\Leftrightarrow \alpha+\beta X-\beta a+\gamma(X^2-2aX+a^2)+\delta(X^3-3aX^2+3a^2X-a^3)=0\\&\Leftrightarrow \alpha-\beta a+\gamma a^2-\delta a^3+(\beta-2a\gamma+3a^2\delta)X+(\gamma-3a\delta)X^2+\delta X^3=0\\&\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha-\beta a+\gamma a^2-\delta a^3=0\\ \beta-2a\gamma+3a^2\delta=0\\ \gamma-3a\delta=0\\ \delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\\ \delta=0\end{cases}\end{aligned}$$

$\mathcal{B}$ est une famille libre à 4éléments dans un espace vectoriel de dimension 4, c'est une base.

Deuxième méthode

$$\alpha+\beta(X-a)+\gamma(X-a)^2+\delta(X-a)^3=0$$

On prend $X=a$, ce qui entraine que $\alpha=0$

$$\beta(X-a)+\gamma(X-a)^2+\delta(X-a)^3=0\Leftrightarrow\beta+\gamma(X-a)+\delta(X-a)^2=0$$

On prend $X=a$, ce qui entraine que $\beta=0$

$$\gamma(X-a)+\delta(X-a)^2=0\Leftrightarrow\gamma+\delta(X-a)=0$$

On prend $X=a$, ce qui entraine que $\gamma=0$, puis que $\delta=0$

Même conclusion.

5.

$$u(1)=1-\frac{1}{3}(X-a)\times 0=1$$

$$u\big((X-a)\big)=X-a-\frac{1}{3}(X-a)\times 1=\frac{2}{3}(X-a)$$

$$u((X-a)^2)=(X-a)^2-\frac{1}{3}(X-a)\times 2(X-a)=\frac{1}{3}(X-a)^2$$

$$u((X-a)^3)=(X-a)^3-\frac{1}{3}(X-a)\times 3(X-a)^2=0$$

Les coordonnées respectives de ces polynômes dans la base $\mathcal{B}'$ sont

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{3}\\0\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\0\\ \frac{1}{3}\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Donc

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{2}{3}&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

6. Première méthode : d'après la matrice D

$$\ker(u)=Vect((X-a)^3)$$
$$Im(u)=Vect(1,X-a,(X-a)^2)$$
$$Rg(u)=3$$

Car manifestement $(1,X-a,(X-a)^2)$ est une base de $Im(u)$

On peut couper les cheveux en 4 en invoquant le théorème du rang mais on a montré que $\mathcal{B}'$ est une base donc tout est évident.

Deuxième méthode (Bien plus longue)

$$\begin{aligned}u(P)=u(\alpha X^3+\beta X^2+\gamma X+\delta)&=\alpha u(X^3)+\beta u(X^2)+\gamma u(X)+\delta u(1)\\&=\alpha a X^2+\beta\left(\frac{2}{3}aX+\frac{1}{3}X^2\right)+\gamma\left(\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}X\right)+\delta\\&=\left(\alpha a+\frac{\beta}{3}\right)X^2+\left(\frac{2a\beta}{3}+\frac{2\gamma}{3}\right)aX+\frac{\gamma a}{3}+\delta\end{aligned}$$

$$P\in\ker(u)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha a+\dfrac{\beta}{3}=0\\ \dfrac{2a\beta}{3}+\dfrac{2\gamma}{3}=0\\ \dfrac{\gamma a}{3}+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-3a\alpha\\ \gamma=-a\beta\\ \delta=-\dfrac{\gamma a}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-3a\alpha\\ \gamma=3a^2\alpha\\ \delta=-a^3\alpha\end{cases}$$

$$P=\alpha X^3-3a\alpha X^2+3a^2\alpha X-a^3\alpha=\alpha(X-a)^3$$

Donc $\ker(u)=Vect((X-a)^3)$, $(X-a)^3$ est une base de $\ker(u)$ et $\dim(ker(u))=1$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}_3[X])\Leftrightarrow\dim\big(Im(u)\big)=3$$

$$u(1)=1-\frac{1}{3}(X-a)\times 0=1$$

$$u(X)=X-\frac{1}{3}(X-a)\times 1=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}X$$

$$u(X^2)=X^2-\frac{1}{3}(X-a)\times 2X=\frac{2a}{3}X+\frac{1}{3}X^2$$

$$u(X^3)=X^3-\frac{1}{3}(X-a)\times 3X^2=aX^2$$

$$Im(u)=Vect\left(1,\frac{a}{3}+\frac{2}{3}X,\frac{2a}{3}X+\frac{1}{3}X^2,aX^2\right)$$

Cette famille est nécessairement liée puis que la dimension de l'image de u est 3, en se forçant un peu on pourrait trouvé une relation entre ces 4 polynômes (mais ce n'est pas trivial), le mieux est de choisir « au hasard » trois polynômes en espérant que cette famille est libre. On prend les trois premiers.

$$\alpha+\beta\left(\frac{a}{3}+\frac{2}{3}X\right)+\gamma\left(\frac{2a}{3}X+\frac{1}{3}X^2\right)=0\Leftrightarrow\alpha+\frac{a}{3}\beta+\frac{2a}{3}\gamma+\left(\frac{2}{3}\beta+\frac{2a}{3}\gamma\right)X+\frac{1}{3}\gamma X^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\dfrac{a}{3}\beta+\dfrac{2a}{3}\gamma=0\\ \dfrac{2}{3}\beta+\dfrac{2a}{3}\gamma=0\\ \dfrac{1}{3}\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

Ces trois polynômes forment une famille libre à trois éléments dans un espace de dimension 3, c'est une base de $Im(u)$.

Correction partie II.

7. Il existe un polynôme Q tel que $P=QP'$, comme $d°P=3$, $d°P'=2$ et $d°P=d°Q+d°P'$ on a $d°Q=1$, par conséquent il existe $\alpha\neq$ et β réels tels que $Q=\alpha X+\beta$.
8. On pose $P=aX^3+bX^2+cX+d$ avec $a\neq 0$, $P'=3aX^2+2bX+c$
$$aX^3+bX^2+cX+d=(\alpha X+\beta)(3aX^2+2bX+c)=3\alpha aX^3+\cdots$$
Les termes non écrits sont de degré inférieur ou égal à 2. On identifie les termes de degré 3 :
$$a=3\alpha a\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{3}$$
Car $a\neq 0$.
$$Q=\frac{1}{3}X+\beta=\frac{1}{3}\left(X+\frac{\beta}{3}\right)=\frac{1}{3}(X-a)$$
Avec $a=-\frac{\beta}{3}$.
9. $P=\frac{1}{3}(X-a)P'\Leftrightarrow P-\frac{1}{3}(X-a)P'=0\Leftrightarrow u(P)=0\Leftrightarrow\exists K\in\mathbb{R},\ P=K(X-a)^3$

Correction partie III.

10. Il existe un polynôme Q tel que $P=QP'$. On a $d°P=d°Q+d°P'$, comme $d°P=n$ et $d°P'=n-1$, $d°Q=1$, par conséquent il existe α et β réels tel que
$$P=(\alpha X+\beta)P'$$

$P = a_n X^n + A$ où $A \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $a_n \neq 0$
$P' = n a_n X^{n-1} + A'$ où $A' \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$
$P = (\alpha X + \beta)P' \Leftrightarrow a_n X^n + A = (\alpha X + \beta) n a_n X^{n-1} + A' \Leftrightarrow a_n X^n + A = \alpha n a_n X^n + \beta n a_n X^{n-1} + A'$

$$d^\circ(\beta n a_n X^{n-1} + A') \leq n - 1$$

On peut identifier les termes de degré n

$$a_n = \alpha n a_n \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{n}$$

Car $a_n \neq 0$

$$Q = \frac{1}{n}X + \beta = \frac{1}{n}\left(X + \frac{\beta}{n}\right) = \frac{1}{n}(X - a)$$

Avec

$$a = -\frac{\beta}{n}$$

11.

$$Q' = \sum_{j=1}^{r}\left(m_j\left(X - a_j\right)^{m_j - 1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r}(X - a_k)^{m_k}\right)$$

$$\frac{Q'}{Q} = \sum_{j=1}^{r}\frac{m_j}{X - a_j}$$

12. On a

$$\frac{P'}{P} = \frac{n}{X - a}$$

C'est la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$, si P avait d'autre racines complexes on pourrait l'écrire comme Q (D'après le théorème de D'Alembert-Gauss) et sa décomposition en éléments simples aurait plus de un élément simple.
Conclusion P n'a qu'une racine, notée a, il existe donc $k \in \mathbb{C}$ tel que

$$P = k(X - a)^n$$

Correction questionnaire

1. Tous les vecteurs colonnes sont proportionnels (et même égaux) donc le rang de A est 1.
   Si $n = 1$ alors $\det(A) = 1$
   Si $n \geq 2$ alors $\det(A) = 0$
2. (a) D'après le théorème de rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim\big(Im(f)\big) = \dim(E)$$

   (b)
   Supposons que f est injective.

$$\ker(f) = \{0_E\} \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 0 \Rightarrow \dim\big(Im(f)\big) = \dim(E)$$

   Or $Im(f) \subset E$ et ces deux espaces vectoriels sont de même dimension donc $Im(f) = E$, ce qui signifie que f est surjective.
   Supposons que f est surjective.

$$Im(f) = E \Rightarrow \dim\big(Im(f)\big) = \dim(E) \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 0 \Rightarrow \ker(f) = \{0_E\}$$

   ce qui montre que f est injective.
3. Il existe a, b et c réels tels que :

$$F = \frac{1}{X(X-1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}$$

   On multiplie par X, puis $X = 0$

$$a=\left[\frac{1}{(X-1)^2}\right]_{X=0}=1$$

On multiplie par $(X-1)^2$, puis $X=1$

$$c=\left[\frac{1}{X}\right]_{X=1}=1$$

On multiplie par X, puis $X\to+\infty$

$$0=a+b\Leftrightarrow b=-1$$

4. A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul or

$$\det(A)=a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{n,n}\neq 0$$

Donc A est inversible

Allez à : Questionnaire