Faculté des sciences et Technologies
Université Claude Bernard (Lyon 1)

16 Juin 2010

CCF de MATH II-Analyse

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est interdite.

I. (3 points)

Calculer, sur un intervalle où cela a un sens :

$$\int \frac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}\,dx$$

II. (7 points)

Dans tout l'exercice a désigne un réel strictement positif. Pour certains réels, on note :

$$f_a(x)=\sqrt{\frac{x+a}{x+1}} \quad \text{et} \quad g_a(x)=\arctan\big(f_a(x)\big)$$

1. Justifié que f_a et g_a sont des fonctions définies sur des ensembles contenant $\mathbb{R}^+$.
2. En utilisant la formule de Taylor-Young, écrire un développement limité à l'ordre 2 de $\arctan$ au voisinage de 1.
3. Pour $x>0$, on note $h=\frac{1}{x}$.
   a) Ecrire un développement limité à l'ordre 2 de $f_a\left(\frac{1}{h}\right)$ exprimé en fonction de h, quand h tend vers 0.
   b) En faire autant pour g_a.
   c) Discuter en fonction de la valeur du paramètre a de la convergence ou de la divergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\left(g_a(x)-\frac{\pi}{4}\right)dx$$

III. (12 points)

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)}\,dt\,, \qquad K_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,dt$$

1. Montrer que, J_n et K_n sont des intégrales convergentes.
2. On rappelle que :

$$\sin(A)-\sin(B)=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

   Montrer que pour tout $n\geq 1$:

$$J_n-J_{n-1}=0$$

   En déduire la valeur de J_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. Soit f définie sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ par $f(0)=0$ et

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \quad \text{pour } t \neq 0$$

Calculer $f'(t)$ pour $t \neq 0$, et en déduire que f est de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$;

4. Calculer $f'(0)$ et conclure que f est de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
5. A l'aide d'une intégration par partie montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} (J_n - K_n) = 0$$

6. Vérifier que :

$$K_n = \int_0^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

7. A l'aide d'une intégration par partie montrer que

$$I_2(X) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{X} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Admet une limite quand $X \to +\infty$.

8. Montrer que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Est une intégrale convergente

9. Montrer que

$$I = \lim_{n \to +\infty} K_n$$

Et en déduire la valeur de I.