Université Claude Bernard Lyon 1

Math II Algèbre

Examen du 15 Juin 2010-2 heures

Exercice 1.

Les polynômes considérés dans cet exercice sont dans $\mathbb{Q}[X]$.

1°) Montrer que 1 est racine simple de $X^3 + X - 2$

En déduire $PGCD(X^3 + X - 2, X^2 - 2X + 1)$.

2°) En utilisant l'algorithme d'Euclide et éventuellement la question 1°), trouver le polynôme

$$PGCD(X^5 + X^3 - X^2 - 2X + 1, X^3 + X - 2)$$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit $f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application linéaire définie par :

$$f(P) = X(X+1)P'' + (X+2)P' - P$$

1°) Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$ et en déduire qu'on peut restreindre f en un endomorphisme qu'on notera $g: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ par la suite.

2°) Donner la matrice de g dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

3°) Calculer le rang de g et donner une base de $Im(g)$.

4°) L'endomorphisme $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ est-il surjectif ? Motiver votre réponse.

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Soit $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire, et $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice de φ dans la canonique de $\mathbb{R}^3$ est la suivante.

$$mat_e(\varphi) = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1°) Montrer qu'il existe et déterminer un vecteur non nul $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $Ker(\varphi) = Vect(a)$.

2°) Déterminer un vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $a = \varphi(b)$.

3°) Montrer que $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3, \varphi(v) = v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4°) Donner un vecteur non nul $c \in E_1$.

5°) Montrer que $e' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6°) Déterminer la matrice $T = mat_{e'}(\varphi)$ de φ dans la base e'.

7°) Donner la matrice de passage de la base e à la base e', notée Q.

8°) Pourquoi la matrice Q est inversible ? Calculer Q^{-1}.

9°) Donner la relation entre A, T et Q.

10°) Calculer le déterminant de T. En déduire le déterminant de A.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Soit $u: E \to F$ une application linéaire. On rappelle que $u(0) = 0$

Montrer que :

1°) Si u est injective alors $\ker(u) = \{0\}$.

2°) Si $\ker(u) = \{0\}$ alors u est injective.

Allez à : Correction exercice 4

CORRECTION

Correction exercice 1.

1°) On pose $P = X^3 + X - 2$, $P' = 3X^2 + 1$

$P(1) = 1^3 + 1 - 2 = 0$ et $P'(1) = 3 \times 1^2 + 1 \neq 0$ donc 1 est racine simple de $X^3 + X - 2$.

$$X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$$

Donc $PGCD(X^3 + X - 2, X^2 - 2X + 1) = X - 1$

2°)

$$\begin{array}{r|l} X^5 + X^3 - X^2 - 2X + 1 & X^3 + X - 2 \\ \cline{2-2} X^5 + X^3 - 2X^2 & X^2 \\ \cline{1-1} X^2 - 2X + 1 & \end{array}$$

$$PGCD(X^5 + X^3 - X^2 - 2X + 1, X^3 + X - 2) = PGCD(X^3 + X - 2, X^2 - 2X + 1) = X - 1$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1°)

$$f(1) = X(X + 1) \times 0 + (X + 2) \times 0 - 1 = -1$$
$$f(X) = X(X + 1) \times 0 + (X + 2) \times 1 - X = 2$$
$$f(X^2) = X(X + 1) \times 2 + (X + 2) \times 2X - X^2 = 6X + 3X^2$$

Donc pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$, si on n'est pas convaincu

$$f(P) = f(a + bX + cX^2) = af(1) + bf(X) + cf(X^2) = -a + 2b + c(6X + 3X^2) \in \mathbb{R}_2[X]$$

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= X(X + 1)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)'' + (X + 2)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' - (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) \\ &= X(X + 1)(\lambda_1 P_1'' + \lambda_2 P_2'') + (X + 2)(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2') - (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) \\ &= \lambda_1 (X(X + 1)P_1'' + (X + 2)P_1' - P_1) + \lambda_2 (X(X + 1)P_2'' + (X + 2)P_2' - P_2) \\ &= \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, il s'agit bien d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2°)

$$mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(1) & g(X) & g(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

3°)

Les deux premières colonnes sont proportionnelles et la troisième n'est pas proportionnelle aux deux premières, il y a deux colonnes libres dans la matrice de g, donc le rang de g est 2.

4°) Si g était surjectif le rang de g serait 3, donc g n'est pas surjectif.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1°)

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 \qquad\quad - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

$$x = (x_3, -x_3, x_3) = x_3(1, -1, 1)$$

On pose $a = (1, -1, 1)$ et alors $\ker(\varphi) = Vect(a)$.

2°) On pose $b = (x_1, x_2, x_3)$

$$\varphi(b)=a \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\begin{cases}x_1-x_2-2x_3=1\\-x_1+x_2+2x_3=-1\\x_1\qquad\quad -x_3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1-x_2-2x_3=1\\x_1=x_3+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_2=x_1-2x_3-1\\x_1=x_3+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_2=-x_3\\x_1=x_3+1\end{cases}$$

$$b=(x_3+1,-x_3,x_3)$$

On peut choisir n'importe quel x_3, on prend, par exemple $x_3=0$ alors $b=(1{,}0{,}0)$

3°) $\varphi(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}$ donc $0_{\mathbb{R}^3}\in E_1$

Soient $v_1\in E_1$ et $v_2\in E_1$, donc $\varphi(v_1)=v_1$ et $\varphi(v_2)=v_2$

Pour tout λ_1 et λ_2 réels

$$\varphi(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2)=\lambda_1\varphi(v_1)+\lambda_2\varphi(v_2)=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2$$

Donc $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2\in E_1$

Par conséquent E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4°) On pose $c=(x_1,x_2,x_3)$

$$c\in E_1 \Leftrightarrow \varphi(c)=c \Leftrightarrow \begin{cases}x_1-x_2-2x_3=x_1\\-x_1+x_2+2x_3=x_2\\x_1\qquad\quad -x_3=x_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x_2-2x_3=0\\-x_1+2x_3=0\\x_1-2x_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=2x_3\\x_2=-2x_3\end{cases}$$

$$c=(2x_3,-2x_3,x_3)=x_3(2,-2{,}1)$$

On peut choisir n'importe quel x_3 non nul, on prend, par exemple $x_3=1$ alors $c=(2,-2{,}1)$

5°)

$$\det(a,b,c)=\begin{array}{c}\begin{matrix}C_1&C_2&C_3\end{matrix}\\\begin{vmatrix}1&1&2\\-1&0&-2\\1&0&1\end{vmatrix}\end{array}=-\begin{vmatrix}-1&-2\\1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

Donc (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$.

6°)

$$T=\begin{array}{cc}\begin{matrix}\varphi(a)&\varphi(b)&\varphi(c)\end{matrix}&\\\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}&\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\end{array}$$

7°)

$$Q=\begin{array}{cc}\begin{matrix}a&b&c\end{matrix}&\\\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&0&-2\\1&0&1\end{pmatrix}&\begin{matrix}e_1\\e_2\\e_3\end{matrix}\end{array}$$

8°)

$$\det(Q)=\det(a,b,c)=-1\neq 0$$

Q est inversible comme toutes les matrices de passage d'une base à une autre.

$$X'=QX\Leftrightarrow QX=X'\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&2\\-1&0&-2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}\Leftrightarrow \begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=x_1'\\-x_1-2x_3=x_2'\\x_1+x_3=x_3'\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l}L_1\\L_2+L_1\\L_3-L_1\end{array}\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=x_1'\\x_2=x_1'+x_2'\\-x_2-x_3=-x_1'+x_3'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_2-2x_3+x_1'\\x_2=x_1'+x_2'\\x_3=-x_2+x_1'-x_3'\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-(x_1'+x_2')-2(-x_2'-x_3')+x_1'\\x_2=x_1'+x_2'\\x_3=-x_2'-x_3'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2'+2x_3'\\x_2=x_1'+x_2'\\x_3=-x_2'-x_3'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}$$

Donc

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

9°)

$$A = QTQ^{-1} \Leftrightarrow T = Q^{-1}AQ$$

10°)

$$\det(T) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(A) = \det(QTQ^{-1}) = \det(Q)\det(T)\det(Q^{-1}) = 0$$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1°) Soit $x \in \ker(u)$

$$u(x) = 0 \Rightarrow u(x) = u(0) \Rightarrow x = 0$$

La première implication vient de $u(0) = 0$ et la seconde vient du fait que u est injective.

2°)

$$u(x_1) = u(x_2) \Rightarrow u(x_1) - u(x_2) = 0 \Rightarrow u(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker(u)$$

Or $\ker(u) = \{0\}$ donc $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ ce qui montre que u est injective.

Allez à : Correction exercice 4