Université Claude Bernard Lyon 1
Math II Algèbre

Examen du 15 Juin 2010-2 heures

Exercice 1.
Les polynômes considérés dans cet exercice sont dans $\mathbb{Q}[X]$.
1°) Montrer que 1 est racine simple de $X^3 + X - 2$
En déduire $PGCD(X^3 + X - 2, X^2 - 2X + 1)$.
2°) En utilisant l'algorithme d'Euclide et éventuellement la question 1°), trouver le polynôme
$$PGCD(X^5 + X^3 - X^2 - 2X + 1, X^3 + X - 2)$$

Exercice 2.
Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit $f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application linéaire définie par :
$$f(P) = X(X+1)P'' + (X+2)P' - P$$
1°) Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$ et en déduire qu'on peut restreindre f en un endomorphisme qu'on notera $g: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ par la suite.
2°) Donner la matrice de g dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3°) Calculer le rang de g et donner une base de $Im(g)$.
4°) L'endomorphisme $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ est-il surjectif ? Motiver votre réponse.

Exercice 3.
Soit $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire, et $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice de φ dans la canonique de $\mathbb{R}^3$ est la suivante.
$$mat_e(\varphi) = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
1°) Montrer qu'il existe et déterminer un vecteur non nul $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $Ker(\varphi) = Vect(a)$.
2°) Déterminer un vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $a = \varphi(b)$.
3°) Montrer que $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3, \varphi(v) = v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4°) Donner un vecteur non nul $c \in E_1$.
5°) Montrer que $e' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6°) Déterminer la matrice $T = mat_{e'}(\varphi)$ de φ dans la base e'.
7°) Donner la matrice de passage de la base e à la base e', notée Q.
8°) Pourquoi la matrice Q est inversible ? Calculer Q^{-1}.
9°) Donner la relation entre A, T et Q.
10°) Calculer le déterminant de T. En déduire le déterminant de A.

Exercice 4.
Soit $u: E \to F$ une application linéaire. On rappelle que $u(0) = 0$
Montrer que :
1°) Si u est injective alors $\ker(u) = \{0\}$.
2°) Si $\ker(u) = \{0\}$ alors u est injective.