Université Claude Bernard-Lyon 1
Licence « sciences et technologie »
Unité d'enseignement « analyse II »
Correction de l'épreuve terminale de contrôle continu
Jeudi 18 JUIN 2009-Durée 2 heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur deux pages (une feuille imprimée recto-verso).
La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la notation.

Exercice 1.
Soit $F(x)=\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t}dt$ définie sur $]0,\pi]$.
1°) Calculer $F'(x)$ et déterminer son signe selon les valeurs de x.
2°) En déduire le sens de variation de F sur $]0,\pi]$.
Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.
Justifier l'existence sur $\mathbb{R}$, puis calculer.

$$F(x)=\int\frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}dx$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.
Soit $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$ avec $a>0$.
Pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout $X>0$ on définit : $I_{\varepsilon,X}=\int_\varepsilon^X\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$

1°) Montrer que I est une intégrale convergente.

2°) A l'aide du changement de variable $t=\frac{a^2}{x}$ montrer que :

$$I_{\varepsilon,X}=-\frac{2\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{X}\right)+\frac{2\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)+\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$$

3°) En faisant tendre ε vers 0 et X vers $+\infty$ dans l'équation ci-dessus et en déduire une relation vérifiée par I, puis la valeur de I.
Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.
1°) Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de :

$$f(x)=\ln\big(1+\mathrm{sh}(x)\big)$$

2°) Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de :

$$g(x)=\frac{\ln\big(1+\mathrm{sh}(x)\big)}{\sin(x)}$$

3°) Montrer que g est prolongeable par continuité en $x=0$.
Correction
1°)

$$\ln\big(1+\text{sh}(x)\big)=\ln\left(1+x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=\ln(1+X)=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}+o(X^3)$$

Avec $X=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, $X^2=\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=x^2+o(x^3)$, $X^3=x^3+o(x^3)$ et $o(X^3)=o(x^3)$

$$\begin{aligned}\ln\big(1+sh(x)\big)&=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}+o(X^3)=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\frac{x^2+o(x^3)}{2}+\frac{x^3+o(x^3)}{3}+o(x^3)\\&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\end{aligned}$$

2°)

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

Donc

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{\ln\big(1+\text{sh}(x)\big)}{\sin(x)}=\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}\\&=\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)=1-\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)x^2+o(x^2)\\&=1-\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

2°) $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)\right)=1$, donc f est prolongeable par continuité en $x=0$ par $f(0)=1$.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Soient a et b tels que : $a<b$ et f de classe C^3 sur $[a,b]$

1°) Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 et montrer qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{b-a}{2}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(c)$$

2°) Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 et montrer qu'il existe d dans $]a,b[$ tel que :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)-\frac{b-a}{2}f'(b)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(d)$$

3°) En déduire qu'il existe c et d dans$]a,b[$ tels que :

$$f(b)-f(a)-\frac{b-a}{2}\big(f'(a)+f'(b)\big)=\frac{(b-a)^2}{8}\big(f''(c)-f''(d)\big)$$

4°) En déduire que :

$$\left|f(b)-f(a)-\frac{b-a}{2}\big(f'(a)+f'(b)\big)\right|\leq\frac{(b-a)^3}{8}\sup_{x\in[a,b]}|f'''(x)|$$

Allez à : Correction exercice 5

CORRECTION

Correction exercice 1.

$$F'(x)=\frac{2\sin(2x)}{2x}-\frac{\sin(x)}{x}=\frac{\sin(2x)-\sin(x)}{\text{x}}=\frac{2\sin(x)\cos(x)-\sin(x)}{x}=\frac{\sin(x)}{x}(2\cos(x)-1)$$

Si $x\in]0,\pi]$, $\sin(x)\geq 0$ et $x\geq 0$.

Si $x\in]0,\frac{\pi}{3}]$, $2\cos(x)-1\geq 0$ donc $F'(x)\geq 0$.

Si $x \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$, $2\cos(x) - 1 \leq 0$ donc $F'(x) \leq 0$.

2°) Si $x \in]0, \frac{\pi}{3}]$ alors F est croissante et si $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ alors F est décroissante.

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

$x \to \frac{\text{ch}(x)}{1+\text{ch}(x)}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $1 + \text{ch}(x) \geq 2 > 0$ et continue comme quotient de fonctions continues.

Faisons le changement de variable $t = e^x$, alors $x = \ln(t)$ donc $dx = \frac{dt}{t}$

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{t + \frac{1}{t}}{2} = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

$$1 + \text{ch}(x) = 1 + \frac{t^2 + 1}{2t} = \frac{2t + t^2 + 1}{2t} = \frac{(t+1)^2}{2t}$$

Donc $F(x) = \int \frac{\frac{t^2+1}{2t}}{\frac{(t+1)^2}{2t}} \frac{dt}{t} = \int \frac{t^2+1}{(t+1)^2 t} dt$

Il faut alors décomposer $\frac{t^2+1}{(t+1)^2 t}$ en élément simple.

$$\frac{t^2 + 1}{(t+1)^2 t} = \frac{a}{(t+1)^2} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t}$$

Je multiplie par $(t+1)^2$, puis $t = -1$.

$$a = \left[\frac{t^2 + 1}{t}\right]_{t=-1} = -2$$

Je multiplie par t, puis $t = 0$.

$$c = \left[\frac{t^2 + 1}{(t+1)^2}\right]_{t=0} = 1$$

Je multiplie par t, puis $t \to \infty$

$$1 = b + c$$

Donc $b = 0$.

$$\frac{t^2 + 1}{(t+1)^2 t} = \frac{-2}{(t+1)^2} + \frac{1}{t}$$

$$F(x) = \int \left(\frac{-2}{(t+1)^2} + \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{t+1} + \ln|t| + K = \frac{2}{e^x + 1} + x + K$$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1°) En 0. $\frac{\ln(t)}{t^2+a^2} \sim \frac{\ln(t)}{a^2}$

$t^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(t)}{a^2} \to 0$ et $\frac{1}{2} < 1$, d'après les règles de Riemann, l'intégrale $\int_0 \frac{\ln(t)}{a^2} dt$ converge.

$\frac{\ln(t)}{a^2}$ est de signe constant au voisinage de 0 donc l'intégrale $\int_0 \frac{\ln(t)}{t^2+a^2} dt$ converge.

En $+\infty$. $\frac{\ln(t)}{t^2+a^2} \sim \frac{\ln(t)}{t^2}$

$t^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(t)}{t^2} \to 0$ et $\frac{3}{2} > 1$, d'après les règles de Riemann, l'intégrale $\int^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$ converge.

$\frac{\ln(t)}{t^2}$ est de signe constant en $+\infty$ donc $\int^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2} dt$.

Finalement I converge.

2°) $dt = -\frac{a^2}{x^2} dx$ et $\frac{\ln(t)}{t^2+a^2} = \frac{\ln\left(\frac{a^2}{x}\right)}{\frac{a^4}{x^2}+a^2}$

Si $t=\varepsilon$ alors $x=\frac{a^2}{\varepsilon}$ et si $t=X$ alors $x=\frac{a^2}{X}$

$$I_{\varepsilon,X}=\int_{\varepsilon}^{X}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt=\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln\left(\frac{a^2}{x}\right)}{\frac{a^4}{x^2}+a^2}\left(-\frac{a^2}{x^2}\right)dx=\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(a^2)-\ln(x)}{\left(\frac{a^2}{x^2}+1\right)a^2}\left(-\frac{a^2}{x^2}\right)dx=-\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{2\ln(a)-\ln(x)}{a^2+x^2}dx$$

$$=-2\ln(a)\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{1}{a^2+x^2}dx+\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx=-2\ln(a)\left[\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}+\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx$$

$$=-2\frac{\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{X}\right)+2\frac{\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)+\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx$$

3°) $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{a^2}{\varepsilon}=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}\frac{a^2}{X}=0$ donc $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ X\to+\infty}}\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx=\int_{+\infty}^{0}\frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx=-I$

$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)=\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{X\to+\infty}\arctan\left(\frac{a}{X}\right)=\arctan(0)=0$

En faisant tendre ε vers 0 et X vers l'infini dans la relation ci-dessous on a :

$$I=\frac{2\times\ln(a)}{a}\frac{\pi}{2}-I$$

D'où

$$I=\frac{\ln(a)}{a}\frac{\pi}{2}$$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1°)

$$\ln\big(1+\mathrm{sh}(x)\big)=\ln\left(1+x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=\ln(1+X)=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}+o(X^3)$$

Avec $X=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, $X^2=\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=x^2+o(x^3)$, $X^3=x^3+o(x^3)$ et $o(X^3)=o(x^3)$

$$\ln\big(1+\mathrm{sh}(x)\big)=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}+o(X^3)=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\frac{x^2+o(x^3)}{2}+\frac{x^3+o(x^3)}{3}+o(x^3)$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

2°)

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

Donc

$$f(x)=\frac{\ln\big(1+\mathrm{sh}(x)\big)}{\sin(x)}=\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}$$
$$=\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)=1-\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)x^2+o(x^2)$$
$$=1-\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)$$

2°) $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)\right)=1$, donc f est prolongeable par continuité en $x=0$ par $f(0)=1$.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1°) f est de classe C^2 sur $[a,b]$ Il existe $c\in\left]a,\frac{a+b}{2}\right[\subset]a,b[$ tel que :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\left(\frac{a+b}{2}-a\right)f'(a)+\frac{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2}{2}f''(c)=f(a)+\frac{b-a}{2}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(c)$$

2°) f est de classe C^2 sur $[a,b]$ Il existe $d\in\left]\frac{a+b}{2},b\right[\subset]a,b[$ tel que :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)f'(b)+\frac{\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2}{2}f''(c)=f(b)-\frac{b-a}{2}f'(b)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(d)$$

3°) En soustrayant ces deux équations on trouve :

$$0=f(a)+\frac{b-a}{2}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(c)-\left(f(b)-\frac{b-a}{2}f'(b)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(d)\right)$$

Donc

$$f(b)-f(a)-\frac{b-a}{2}\big(f'(a)+f'(b)\big)=\frac{(b-a)^2}{8}\big(f''(c)-f''(d)\big)$$

4°) f'' est de classe C^1sur $[a,b]$ donc, d'après l'égalité des accroissements finis il existe $e\in]c,d[\subset]a,b[$ tel que :

$$f''(c)-f''(d)=(c-d)f'''(e)$$

Donc

$$|f''(c)-f''(d)|=|(c-d)f'''(e)|\le|b-a||f'''(e)|\le(b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f'''(x)|$$

On reprend l'égalité du 3°)

$$\left|f(b)-f(a)-\frac{b-a}{2}\big(f'(a)+f'(b)\big)\right|=\frac{(b-a)^2}{8}|f''(c)-f''(d)|\le\frac{(b-a)^2}{8}(b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f'''(x)|$$

$$\left|f(b)-f(a)-\frac{b-a}{2}\big(f'(a)+f'(b)\big)\right|\le\frac{(b-a)^3}{8}\sup_{x\in[a,b]}|f'''(x)|$$

Allez à : Exercice 5