Correction Math II algèbre Juin 2009

Exercice 1.

Soit $\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2, a_i \in \mathbb{R}\}$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? On considère l'application

$$f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \longmapsto (X+1)P'$$

a) Montrer que f est linéaire.

b) Montrer que la matrice A de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Montrer que $\mathcal{B}' = (1, X+1, (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

d) Trouver la matrice B de f par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'$.

e) Calculer A^2, A^3 et B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

f) Déterminer le rang de f.

g) Trouver une base de l'image de f.

h) Trouver une base du noyau de f.

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Soit E un espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E tel que : $f^2 = id$.

On pose $E_1 = \ker(f - id)$ et $E_2 = \ker(f + id)$.

a) Soit $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

b) Pour tout $x \in E$ écrire $x = \frac{f(x)+x}{2} - \frac{f(x)-x}{2}$. Montrer que $E_1 \oplus E_2 = E$.

c) On suppose E de dimension finie et $f \neq \pm id$. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E.
telle que $E_1 = Vect(v_1, v_2, \dots, v_r)$ et $E_2 = Vect(v_{r+1}, \dots, v_n)$.
Ecrire la matrice de f dans la base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

a) Montrer que le polynôme $A = X^3 - 19X + 30$ est divisible par $X - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

b) Donner la décomposition de A en produit de facteurs de degré 1 dans $\mathbb{R}[X]$.

c) Soient p et q deux nombres réels et α, β et γ les trois racines complexes du polynôme $P = X^3 + pX + q$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_k = \alpha^k + \beta^k + \gamma^k$$

Calculer S_0, S_1 et S_2 en fonction de p et q.

Indication : utiliser les relations entre les racines et les coefficients.

d) Supposons avoir montré que pour tout $k \geq 3$,

$$S_k = -pS_{k-2} - qS_{k-3} \qquad (1)$$

En déduire de (1) les expressions de S_3, S_4 et S_5 en fonction de p et q.

e) Déduire des questions précédentes les solutions réelles du système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -90 \\ x^5 + y^5 + z^5 = -2850 \end{cases}$$

Allez à : Correction exercice 3

CORRECTION

Correction exercice 1.

a) Si $\in \mathbb{R}_2[X]$, $d°(X+1)P' \leq 1+2-1=2$ donc f est bien une application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = (X+1)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' = (X+1)(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2') = \lambda_1 (X+1)P_1' + \lambda_2 (X+1)P_2' = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$

donc f est linéaire, c'est même un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b)

$$f(1) = (X+1) \times 0 = 0 = 0 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2$$
$$f(X) = (X+1) \times 1 = 0 = 1 \times 1 + 1 \times X + 0 \times X^2$$
$$f(X^2) = (X+1) \times 2X = 0 = 0 \times 1 + 2 \times X + 2 \times X^2$$

Donc $A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$

c) $\alpha + \beta(X+1) + \gamma(X+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \gamma X^2 + (\beta + 2\gamma)X + \alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$

Donc B' est une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3 ($dim\mathbb{R}_2[X] = 3$), c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

d)

$$f(1) = (X+1) \times 0 = 0 = 0 \times 1 + 0 \times (X+1) + 0 \times (X+1)^2$$
$$f(X+1) = (X+1) \times 1 = 0 = 0 \times 1 + 1 \times (X+1) + 0 \times (X+1)^2$$
$$f((X+1)^2) = (X+1) \times 2(X+1) = 0 = 0 \times 1 + 0 \times (X+1) + 2 \times (X+1)^2$$

Donc

$$B = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X+1) & f((X+1)^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X+1 \\ (X+1)^2 \end{array} \end{array}$$

e)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Si $k > 0$

$$B^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Et $B^0 = I$

f)

La première colonne de la matrice A est nulle, donc le rang de A est inférieur ou égal à 2, les deux suivantes ne sont pas proportionnelles, donc le rang de A est au moins 2.

$$rg(A) = rg(f) = 2$$

g)

$Im(f)$ est engendré par $f(X) = 1 + X$ et $f(X^2) = 2X + 2X^2$, cette famille constitue une base de $Im(f)$.

h)

D'après le théorème du rang, la dimension du noyau de f est 1, car

$$\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = dim\mathbb{R}_2[X] = 3$$

Or $f(1) = 0$, donc le noyau de f est la droite vectorielle engendrée par le « vecteur » 1. (C'est-à-dire le polynôme constant égale à 1).

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

a) Soit $x_1 \in E_1$, $(f - id)(x_1) = 0_E \Leftrightarrow f(x_1) - x_1 = 0_E \Leftrightarrow f(x_1) = x_1$

Soit $x_2 \in E_2$, $(f + id)(x_2) = 0_E \Leftrightarrow f(x_2) + x_2 = 0_E \Leftrightarrow f(x_2) = -x_2$

b) On pose $x_1 = \frac{f(x)+x}{2}$ et $x_2 = -\frac{f(x)-x}{2}$

$$f(x_1) = f\left(\frac{f(x)+x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f^2(x) + f(x)\right) = \frac{1}{2}\left(x + f(x)\right) = x_1$$

Donc, d'après la première question, $x_1 \in E_1$.

De même

$$f(x_2) = f\left(-\frac{f(x)-x}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(f^2(x) - f(x)\right) = -\frac{1}{2}\left(x - f(x)\right) = -\left(-\frac{f(x)-x}{2}\right) = -x_2$$

Donc, d'après la première question, $x_2 \in E_2$.

Comme $x = x_1 + x_2$, on a $E_1 + E_2 = E$

Il reste à montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

Si $x \in E_1 \cap E_2$ alors $f(x) = x$ et $f(x) = -x$ donc $x = -x$ ce qui montre que x est le vecteur nul.

On a $E_1 \oplus E_2 = E$.

c) $f(v_i) = v_i$ pour $1 \leq i \leq r$ et $f(v_i) = -v_i$ pour $r + 1 \leq i \leq n$

La matrice de f dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

a) $A(2) = 2^3 - 19 \times 2 + 30 = 8 - 38 + 30 = 0$

Donc A est divisible par $X - 2$.

b)

$$\begin{array}{r|l} X^3 \qquad - \ 19X + 30 & X - 2 \\ \cline{2-2} X^3 - 2X^2 \qquad\qquad & X^2 + 2X - 15 \\ \hline 2X^2 - 19X + 30 & \\ 2X^2 - 4X \qquad & \\ \hline -15X + 30 & \\ -15X + 30 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Il reste à trouver les racines de $X^2 + 2X - 15 = 0$, c'est-à-dire -5 et 3.

$$X^3 - 19X + 30 = (X - 2)(X - 3)(X + 5)$$

c) On rappelle que $(X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma) = X^3 - (\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma$

Donc $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p$ et $\alpha\beta\gamma = -q$

$$S_0 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$S_1 = \alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$S_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = -2p$$

d) Question non demandée :

$$S_k = \alpha^k + \beta^k + \gamma^k = \alpha^{k-3}\alpha^3 + \beta^{k-3}\beta^3 + \gamma^{k-3}\gamma^3 = \alpha^{k-3}(-p\alpha - q) + \beta^{k-3}(-p\beta - q) + \gamma^{k-3}(-p\gamma - q)$$

Car $\alpha^3 + p\alpha + q = 0$ entraine que $\alpha^3 = -p\alpha - q$, idem pour β^3 et γ^3.

Donc

$$S_k = \alpha^{k-3}(-p\alpha - q) + \beta^{k-3}(-p\beta - q) + \gamma^{k-3}(-p\gamma - q)$$
$$= -p\alpha^{k-2} - q\alpha^{k-3} - p\beta^{k-2} - q\beta^{k-3} - p\gamma^{k-2} - q\gamma^{k-3} = -pS_{k-2} - qS_{k-3}$$
$$S_3 = -pS_1 - qS_0 = -3q$$
$$S_4 = -pS_2 - qS_1 = 2p^2$$
$$S_5 = -pS_3 - qS_2 = 3pq + 2pq = 5pq$$

e) x, y et z vérifient $x + y + z = 0$, ils sont les trois racines du polynôme $X^3 + pX + q = 0$ avec $p = xy + xz + yz$ et $q = -xyz$.

En utilisant la notation $S_k = x^k + y^k + z^k$, le système devient :

$$\begin{cases} S_1 = 0 \\ S_3 = -90 \\ S_5 = -2850 \end{cases}$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -3q = -90 \\ 5pq = -2850 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 30 \\ pq = -570 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 30 \\ p = -19 \end{cases}$$

Cela signifie que x,y et z sont les solutions de $X^3 - 19X + 30 = 0$, ce sont donc les racines que l'on a trouvé au b), en faisant toutes les permutations possibles :

$$(x, y, z) \in \{(-5,2,3), (-5,3,2), (2, -5,3), (2,3, -5), (3, -5,2), (3,2, -5)\}$$

Allez à : Exercice 3