03 juin 2008

Licence "Sciences et technologie"
Université Claude Bernard (Lyon 1)

Examen de l'unité d'enseignement Math II Analyse

Durée: 2 heures

Les documents ne sont pas autorisés. La qualité de la rédaction est un élément d'appréciation significatif. Le barème est indicatif.

I. (7 points)

a) Calculer l'intégrale $I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$ à l'aide de changement de variable $t = \phi(u)$ avec $\phi = \tan$.

b) Calculer l'intégrale $I_2 = \int_2^3 \frac{2x+5}{x(x-1)(x-4)} dx$.

c) Soit f une application continue à valeurs positives de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = 3$.

   1) Montrer qu'il existe un intervalle fermé de la forme $[0, \eta]$, avec $0 < \eta$, sur lequel $f(x) \geq 2$.
   2) En déduire que $\int_0^1 (f(x))^n dx \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

II.(6 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - x$.

A) 1) Effectuer un développement limié de $f(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

   2) Effectuer un développement limité de $f(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 1.

3) Montrer que f admet une limite pour $x \to +\infty$ et calculer cette limite.

B) On pose $g(x) = \text{Arctan}(f(x))$.

1) Justifier pourquoi g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer $g'(x)$ pour tout x réel et montrer que $g'(x) = \frac{a}{1+x^2}$ pour une constante réelle a qu'on explicitera.
3) En déduire que $g(x) = b - a\text{Arctan}x$ pour tout x réel, b étant une constante que l'on explicitera.

III. (7 points)

Soit G une fonction définie par

$$G(x) = \int_0^x e^t \ln(1 + e^{-t})dt.$$

1) a) Montrer que G est deux fois dérivable, calculer sa dérivée $G'(x)$ et sa dérivée seconde $G''(x)$.

   b) Déterminer le développement limité de G, à l'ordre 2, dans un voisinage de 0.

   c) Déterminer une équation de sa tangente au point d'abscisse $x = 0$ et préciser la position du graphe par rapport à la tangente dans un voisinage du point d'abscisse $x = 0$.

2) a) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange montrer que pour tout $u > 0$:
$$u - \frac{u^2}{2} < \ln(1 + u) < u.$$

   b) En déduire (Indication: poser $u = e^{-t}$) que
$$x + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2} < G(x) < x \qquad \text{pour } x > 0.$$

   c) Trouver un équivalent de $G(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

3) Exprimer $G(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.