Université Claude Bernard Lyon 1

Contrôle continu final
MASS 32 Compléments d'Analyse

Mercredi 18 Janvier 2012

Durée : 2 heures

Les documents et les calculatrices sont interdits

Exercice 1 *Soit* $u_n = (-1)^n \left(\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+2}\right)$.

1) Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *est convergente.*

2) Montrer que $u_0 + u_1 + \cdots + u_9$ *est une valeur approchée de* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *à* $0,1$ *près.*

Exercice 2 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de fonctions définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_n(x) = \frac{x + nx^2 + nx^3}{(n+1)x^2 + 1}$$

1) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas uniformément sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 3 *Montrer que la série de fonctions* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx + n\sin nx}{n^3 + 4x^2}$ *est normalement convergente sur* $[-a, a]$ *pour tout réel* $a > 0$. *Cette série est-elle continue sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 4 *Développer* $f(x) := sin(2x).cos(4x)$ *en série entière au voisinage de* 0.

Exercice 5 .

1) Donner le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{3^{n+1}} z^n$.

2) Donner le rayon de convergence de la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{3^{n+1}} + \frac{(3+4i)^{n^2}}{(5^n+4)^n}\right] z^n.$$

Exercice 6 *Pour tout entier naturel* $n \geq 2$, *on considère la fonction réelle*

$$u_n(x) = \ln\left(1 - \frac{x}{n^2}\right).$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=2}^{\infty} u_n'(x)$ *converge uniformément sur* $[0,1]$.

2) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=2}^{\infty} u_n(x)$ *est dérivable sur* $[0,1]$, *est-elle uniformément convergente sur* $[0,1]$ *?*

Exercice 7 *Soit* $f(x) = \arctan \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

1) Calculer $f'(x)$.

2) Développer $g(x) := \frac{-2x}{1+x^4}$ *en série entière au voisinage de* 0.

3) Développer $f(x)$ *en série entière au voisinage de* 0.

Exercice 8 *Soit* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R < 1$. *On pose* $S_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. *Soit* R' *le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n$.

1) Donner la série produit des séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

2) Montrer que $R' \geq R$.

3) Soit $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < R'$, *montrer que* $\sum_{n=1}^{\infty} S_{n-1} z^n$ *converge et en déduire que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge.*

4) En déduire que $R' = R$.