MASS 32 Compléments d'Analyse

Contrôle continu final

Vendredi 21 Janvier 2011

Durée : 2 heures

Les documents et les calculatrices sont interdits

Exercice 1.

1) On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \dfrac{x^2}{n} e^{-nx}$.

a) Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est simplement convergente sur $[0, +\infty[$ et qu'elle diverge pour tout $x \notin [0, +\infty[$.

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on note $f(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

b) Expliciter, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre réel $||u_n||_\infty := \displaystyle\sup_{x \in [0,+\infty[} |u_n(x)|$.

c) f est-elle continue sur $[0, +\infty[$?

2) On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $v_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $v_n(x) = \dfrac{1}{n} e^{-nx}$.

a) Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ est simplement convergente sur $]0, +\infty[$ et qu'elle diverge pour tout $x \notin]0, +\infty[$.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on note $g(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$.

b) Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g(x) \leq \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

c) Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n'$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

d) Démontrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et expliciter $g'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

e) En déduire $g(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

3) Expliciter $f(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

Exercice 2. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^4+nx^2}{n^2}$.

1) Démontrer que cette série est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $[a,b]$ avec $a<b$ mais n'est pas absolument convergente sur cet intervalle.

2) Enoncer le théorème d'intégrabilité des séries de fonctions et montrer que

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^4+nx^2}{n^2}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{5n+3}{15n^2}.$$

Exercice 3. Développer $\ln(3-2x-x^2)$ en série entière et préciser le rayon de convergence de la série trouvée.

Exercice 4.

1) Expliquer pourquoi l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ pour tout } x \neq 0, \text{ et } f(0)=1$$

est développable en série entière, préciser pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur numérique de $f^{(n)}(0)$.

2) On désigne par $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière à variable réelle de rayon de convergence R et de somme S.

On considère l'équation différentielle :

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \qquad (E)$$

où y est une fonction de x.

a) Démontrer que S est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si :

$$a_1 = 0 \text{ et } (n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \text{ pour } n \geq 1.$$

b) Si S est solution de (E) calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{2n+1}, puis a_{2n} en fonction de a_0, et expliciter S en fonction de a_0 et de f. Déterminer R.