Universités Lyon 1 et Lyon 2

L2 - MASS 32
Compléments d'Analyse

Contrôle continu final
Mercredi 20 Janvier 2010
Durée : 2 heures
Les documents et les calculatrices sont interdits

Exercice 1. Etudier la convergence de la série de terme général u_n:

1) $u_n = \dfrac{e^{\sqrt{n}}}{(2n+1)!}$.

2) $u_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n+1}}{n}$.

Exercice 2. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = (\cos x)^n$.

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers une fonction f qu'on déterminera.

2) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

3) Montrer que $\forall a > 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[a, \frac{\pi}{2}]$.

4) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n \, dx$.

Exercice 3. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx^2}}$.

1) Montrer que cette série est normalement convergente sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

2) Montrer que cette série est continue sur $]0, +\infty[$.

3) Cette série est-elle dérivable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 4. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{7} - 2i\right)^{2n} z^n$.

Exercice 5. Développer les fonctions suivantes en série entière de x et pour chacune d'elles préciser le rayon de convergence de la série trouvée.

1) $\sin x \cos(3x)$.

2) $\dfrac{6}{2 - x - x^2}$.

Exercice 6. On considère l'équation différentielle :

$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0.$$

Déterminer une solution f sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ telle que $f(0) = 1$, et donner son rayon de convergence.