Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « sciences et technologies »
Unité d'enseignement Analyse I- Les réels et les fonctions
CONTRÔLE FINAL
5 Janvier-durée 2h

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence
$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{-u_n + 3}$$
Et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$$

1. Calculer u_1 et u_2
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n < -1$
3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, u_n est croissante
4. En déduire la limite de la suite (u_n)
5. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Exprimer v_n en fonction de n.
6. En déduire u_n en fonction de n et retrouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Correction exercice 1.

1. $$u_1 = \frac{3\times 2 - 1}{-2+3} = 5 \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{3\times 5 - 1}{-5+3} = -7$$
2. Par récurrence $u_2 = -7 < -1$
   On calcule, pour tout $n \geq 2$
   Première méthode
   $$u_{n+1} + 1 = \frac{3u_n - 1}{-u_n + 3} + 1 = \frac{3u_n - 1 - u_n + 3}{-u_n + 3} = \frac{2u_n + 2}{-u_n + 3} = 2\frac{u_n + 1}{-u_n + 3}$$
   Par hypothèse de récurrence $u_n + 1 < 0$ et
   $$u_n < -1 \Rightarrow -u_n > 1 \Rightarrow -u_n + 3 > 4 > 0$$
   Donc $u_{n+1} < -1$
   Deuxième méthode (moins bonne)
   $$u_n < -1 \Rightarrow -u_n > 1 \Rightarrow -u_n + 3 > 4 > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{-u_n + 3} < 1/4$$
   Donc
   $$u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{-u_n + 3} < \frac{3u_n - 1}{4} < \frac{-3 - 1}{4} = -1$$
   Dans les deux cas pour tout $n \geq 2$, $u_n < -1$.
3. Pour tout $n \geq 2$
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 1}{-u_n + 3} - u_n = \frac{3u_n - 1 + u_n^2 - 3u_n}{-u_n + 3} = \frac{u_n^2 - 1}{-u_n + 3}$$
   $$u_n < -1 \Rightarrow u_n^2 - 1 > 0$$
   Et comme au 2. $-u_n + 3 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite est croissante.

4. La suite est croissante et majorée donc elle converge vers une limite finie l qui vérifie
$$l=\frac{3l-1}{-l+3}\Leftrightarrow -l^2+3l=3l-1\Leftrightarrow l^2=1\Leftrightarrow l=-1 \quad \text{ou} \quad l=1$$
Or pour $n\geq 2$, $u_n<-1$ donc $l=-1$.

5.
$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-1}=\frac{\frac{3u_n-1}{-u_n+3}+1}{\frac{3u_n-1}{-u_n+3}-1}=\frac{3u_n-1-u_n+3}{3u_n-1+u_n-3}=\frac{2u_n+2}{4u_n-4}=\frac{1}{2}\times\frac{u_n+1}{u_n-1}=\frac{1}{2}v_n$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$
$$v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n v_0=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{u_0+1}{u_0-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{2+1}{2-1}=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
Pour tout $n\in\mathbb{N}$
$$v_n=\frac{u_n+1}{u_n-1}\Leftrightarrow v_n(u_n-1)=u_n+1\Leftrightarrow v_nu_n-v_n=u_n+1\Leftrightarrow v_nu_n-u_n=v_n+1\Leftrightarrow u_n(v_n-1)$$
$$=v_n+1\Leftrightarrow u_n=\frac{v_n+1}{v_n-1}=\frac{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$$

6.

Comme $-1<\frac{1}{2}<1$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$$
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=-1$$

Exercice 2.

On considère l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x\leq 0\\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x>0$
2. Calculer les limites
$$\lim_{x\to 0^+}f(x), \qquad \lim_{x\to 0^+}f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+}f''(x).$$
3. La fonction f est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ? Calculer, si possible $f'(0)$ et $f''(0)$.
4. Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie par $g(x)=f(x)f(2-x)$. Préciser l'intervalle où $g(x)\neq 0$
5. Montrer que $g(2-x)=g(x)$, en déduire que la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie du graphe de g.
6. Montrer que g est continue et dérivable en 0, donner les valeurs de $g(0)$ et $g'(0)$.
7. tracer le graphe de la fonction g.

Correction exercice 2.

1. Pour $x>0$.
$$f'(x)=-\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}$$
$$f''(x)=-2x^{-3}e^{-\frac{1}{x}}+x^{-2}x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}=\left(-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$
2. On pose $X=\frac{1}{x}$, lorsque x tend vers 0^+ alors X tend vers $+\infty$.
$$f'(x)=X^2e^{-X}\xrightarrow[X\to+\infty]{}0$$

Par croissance comparée des polynômes et de l'exponentielle.

$$f''(x) = (-2X^3 + X^4)e^{-X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0$$

Par croissance comparée des polynômes et de l'exponentielle.

3.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$$

Evidemment, donc la fonction est continue en 0.

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$$

f' admet une limite finie en 0 et f est continue en 0, par conséquent la fonction f est de classe C^1 en 0, donc dérivable et $f'(0) = 0$.

De même

$$\lim_{x \to 0^-} f''(x) = 0$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} f''(x) = 0$$

f'' admet une limite finie en 0 et f' est continue en 0, par conséquent la fonction f' est de classe C^1 (donc f est de classe C^2) en 0, donc dérivable (et f deux fois dérivable en 0) et $f''(0) = 0$.

4.

Si $x \leq 0$ alors $f(x) = 0$ donc $g(x) = 0$

Si $x \leq 2$ alors $x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - x \leq 0$ donc $f(2 - x) = 0$.

Si $0 < x < 2$ alors $0 < 2 - x$, donc

$$g(x) = e^{-\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{2-x}} = e^{-\frac{1}{x} - \frac{1}{2-x}} = e^{-\frac{(2-x)+x}{x(2-x)}} = e^{-\frac{2}{x(2-x)}} = e^{\frac{2}{x^2-2x}}$$

5.

$$g(2 - x) = f(2 - x)f\big(2 - (2 - x)\big) = f(2 - x)f(x) = g(x)$$

$$\frac{x + 2 - x}{2} = 1 \quad \text{et} \quad g(2 - x) = g(x)$$

Donc la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie du graphe de g.

6. Première méthode

f est continue sur $\mathbb{R}$, g est le produit de fonctions et de composées continues sur $\mathbb{R}$ donc g est continue sur $\mathbb{R}$, par conséquent $g(0) = f(0)f(2) = 0 \times e^{-\frac{1}{2}} = 0$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, g est le produit de fonctions et de composées dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$, par conséquent

$$g'(x) = f'(x)f(2 - x) - f(x)f'(2 - x) \Rightarrow g'(0) = f'(0)f(2) - f(0)f'(2) = 0 \times f(2) - 0 \times f'(2) = 0$$

Deuxième méthode

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)f(2 - x) = f(0)f(2) = 0 \times e^{-\frac{1}{2}} = 0 = g(0)$$

Donc g est continue en 0.

Pour $x \in]0,2[$

$$g'(x) = f'(x)f(2 - x) - f(x)f'(2 - x)$$

$$\lim_{x \to 0^+} g'(x) = \lim_{x \to 0^+} \big(f'(x)f(2 - x) - f(x)f'(2 - x)\big) = f'(0)f(2) - f(0)f'(2) = 0 \times f(2) - 0 \times f'(2) = 0$$

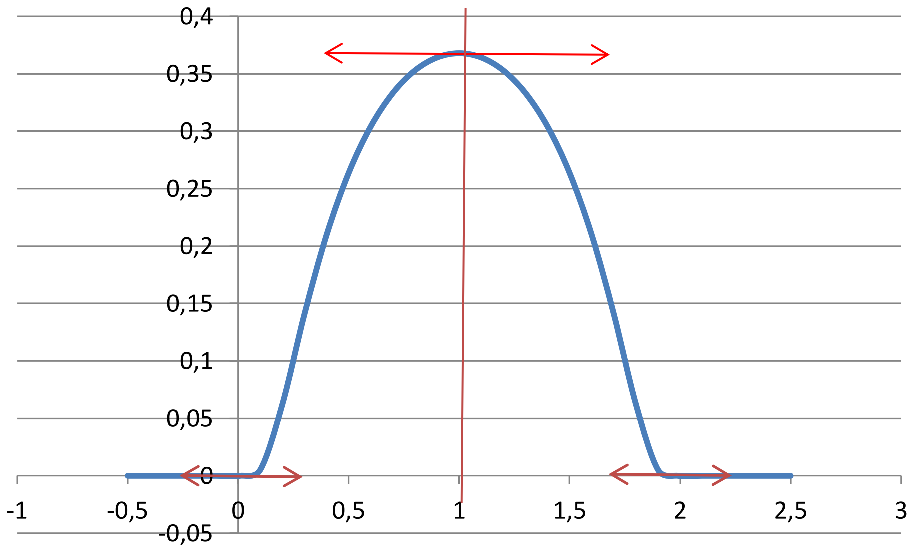
Pour $x < 0$, $g(x) = 0$, donc $g'(x) = 0$ et sa limite en 0^- est nulle

g est continue et $g'(x)$ admet une limite finie en 0 donc g est de classe C^1 et en particulier dérivable, de plus $g'(0) = 0$.

7. Pour $x \in]0,2[$

$$g'(x) = -\frac{2(2x-2)}{\big(x(2-x)\big)^2} e^{\frac{2}{x^2-2x}} = 4\frac{1-x}{\big(x(2-x)\big)^2} e^{\frac{2}{x^2-2x}}$$

g est donc croissante jusqu'à $x = 1$, admet une tangente horizontale en $x = 1$, puis est décroissante ensuite.



Exercice 3.

On se propose d'étudier l'équation différentielle

$$y'(t) + \frac{y(t)}{2t} = \frac{t^3}{2}, \quad \text{pour } t \in]0,+\infty[\quad (E)$$

Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$, où $t_0 \in]0,+\infty[$.

Correction exercice 3.

On résous d'abord l'équation homogène

$$y'(t) + \frac{y(t)}{2t} = 0$$

Ce qui équivaut à

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{1}{2t} = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{t} \Leftrightarrow \ln|y(t)| = -\frac{1}{2}\ln(t) + K,\ \ K \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(t) = \lambda e^{-\frac{1}{2}\ln(t)} = \lambda t^{-\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{t}},$$
$$\lambda \in \mathbb{R}$$

Puis on cherche une solution particulière de (E) de la forme

$$y_P(t) = \lambda(y)t^{-\frac{1}{2}}$$
$$y_P'(t) = \lambda'(y)t^{-\frac{1}{2}} + \lambda(t)\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-\frac{3}{2}}$$

Ce que l'on remplace dans

$$y_P'(t) + \frac{y_P(t)}{2t} = \frac{t^3}{2} \Leftrightarrow \lambda'(t)t^{-\frac{1}{2}} + \lambda(t)\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-\frac{3}{2}} + \frac{\lambda(t)t^{-\frac{1}{2}}}{2t} = \frac{t^3}{2} \Leftrightarrow \lambda'(t)t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\lambda(t)t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\lambda(t)t^{-\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{t^3}{2} \Leftrightarrow \lambda'(t)t^{-\frac{1}{2}} = \frac{t^3}{2} \Leftrightarrow \lambda'(t) = \frac{t^{3+\frac{1}{2}}}{2} = \frac{t^{\frac{7}{2}}}{2}$$

On recherche une solution particulière donc une primitive de $\lambda'(t)$ suffit

$$\lambda(t) = \frac{2}{9}\times\frac{1}{2}\times t^{\frac{9}{2}} = \frac{1}{9}t^{\frac{9}{2}}$$

Par conséquent

$$y_P(t) = \frac{1}{9} t^{\frac{9}{2}} t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9} t^4$$

La solution générale de (E) est donc

$$y(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{t}} + \frac{t^4}{9}$$

$$y(t_0) = y_0 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{t_0}} + \frac{t_0^4}{9} = y_0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{t_0^{\frac{9}{2}}}{9} + y_0\sqrt{t_0} = -\frac{\sqrt{t_0}t_0^4}{9} + y_0\sqrt{t_0}$$

Ce qui entraine que la solution cherchée est :

$$y(t) = \frac{-\sqrt{t_0}t_0^4 + 9y_0\sqrt{t_0}}{9\sqrt{t_0}} + \frac{t^4}{9}$$

Exercice 4.

On considère x réel quelconque fixé. On considère aussi pour tout $h \in]-1,1[$ la fonction

$$f(y) = y - h\sin(y)$$

1. Justifier l'existence et calculer les limites
$$\lim_{y\to-\infty} f(y) \qquad \text{et} \qquad \lim_{y\to+\infty} f(y)$$
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. En déduire qu'il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = x + h\sin(y)$. Dorénavant on note $y(h)$ ce unique y associé à h.
4. Montrer que
$$\lim_{h\to 0} y(h) = x$$
5. Montrer que
$$\lim_{h\to 0} \sin\big(y(h)\big) = \sin(x)$$
6. En déduire
$$\lim_{h\to 0} \frac{y(h) - x}{h}$$

Correction exercice 4.

1.
   $\sin(y)$ est bornée et $y \to -\infty$ donc $f(y) \to -\infty$,
   De même $\sin(y)$ est bornée er $y \to +\infty$ donc $f(y) \to +\infty$
2. $f'(y) = 1 - h\cos(y)$
   Or $-1 < h < 1$ donc $|h| < 1$, donc $|h\cos(y)| < 1$, par conséquent $-1 < h\cos(y) < 1$ et en particulier $1 - h\cos(h) > 0$, ce qui entraine que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ (celui de l'ensemble d'arrivée) il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ (celui de l'ensemble de départ) tel que $x = f(y)$ car f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Donc
$$x = y - h\sin(h)$$
   Ce qui entraine que
$$y(h) = x + h\sin\big(y(h)\big)$$
4. Par conséquent, maintenant que h est une variable et que $\sin\big(y(h)\big)$ est bornée
$$\lim_{h\to 0} y(h) = x$$
5. y et sin sont des fonctions continues donc
$$\lim_{h\to 0} \sin\big(y(h)\big) = \sin(x)$$

6.

$$\frac{y(h)-x}{h}=\frac{x+h\sin\big(y(h)\big)-x}{h}=\frac{h\sin\big(y(h)\big)}{h}=\sin\big(y(h)\big)$$

D'après 5.

$$\lim_{h\to 0}\frac{y(h)-x}{h}=\sin(x)$$