Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « sciences et technologies »
Unité d'enseignement Analyse I- Les réels et les fonctions
CONTRÔLE FINAL
5 Janvier-durée 2h

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{-u_n + 3}$$

Et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$$

1. Calculer $u_1$ et $u_2$
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n < -1$
3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n$ est croissante
4. En déduire la limite de la suite $(u_n)$
5. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
6. En déduire $u_n$ en fonction de $n$ et retrouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2.

On considère l'application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x > 0$
2. Calculer les limites
$$\lim_{x\to 0^+} f(x), \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f''(x).$$
3. La fonction $f$ est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ? Calculer, si possible $f'(0)$ et $f''(0)$.
4. Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $g(x) = f(x)f(2-x)$. Préciser l'intervalle où $g(x) \neq 0$
5. Montrer que $g(2-x) = g(x)$, en déduire que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie du graphe de $g$.
6. Montrer que $g$ est continue et dérivable en 0, donner les valeurs de $g(0)$ et $g'(0)$.
7. tracer le graphe de la fonction $g$.

Exercice 3.

On se propose d'étudier l'équation différentielle

$$y'(t) + \frac{y(t)}{2t} = \frac{t^3}{2}, \quad \text{pour } t \in \,]0,+\infty[ \qquad (E)$$

Déterminer l'unique solution de $(E)$ vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$, où $t_0 \in \,]0,+\infty[$.

Exercice 4.

On considère $x$ réel quelconque fixé. On considère aussi pour tout $h \in \,]-1,1[$ la fonction

$$f(y) = y - h\sin(y)$$

1. Justifier l'existence et calculer les limites

$$\lim_{y \to -\infty} f(y) \qquad \text{et} \qquad \lim_{y \to +\infty} f(y)$$

2. Montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. En déduire qu'il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = x + h\sin(y)$. Dorénavant on note $y(h)$ ce unique $y$ associé à $h$.
4. Montrer que

$$\lim_{h \to 0} y(h) = x$$

5. Montrer que

$$\lim_{h \to 0} \sin\big(y(h)\big) = \sin(x)$$

6. En déduire

$$\lim_{h \to 0} \frac{y(h) - x}{h}$$