Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « sciences et technologies »
Unité d'enseignement Algèbre I-Structures fondamentales
CONTRÔLE FINAL
5 Janvier-durée 2h

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1.

On définit une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ \forall n \geq 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$

Démontrer que

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n.F_{n+1}$$

Correction exercice 1.

On note (H_n) l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n.F_{n+1}$$

Pour $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} F_k^2 = F_1^2 = 1$$

Et

$$F_1.F_2 = 1$$

Donc (H_1) est vrai.

Montrons que $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$ est vraie.

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=1}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2 = F_n.F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}.F_{n+2}$$

Ce qui montre que $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$ est vraie, par conséquent, pour tout $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n.F_{n+1}$$

Exercice 2.

Soit $\alpha = e^{\frac{i\pi}{5}}$ et $\omega = \alpha^2$

1. Calculer α^5 et ω^5.
2. Démontrer la relation
$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$$
3. Calculer A
$$A = \alpha^5(\alpha + \alpha^{-1})(\alpha^2 + \alpha^{-2})$$
4. Développer et simplifier l'expression $A = \alpha^5(\alpha + \alpha^{-1})(\alpha^2 + \alpha^{-2})$
En déduire que
$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}$$

Correction exercice 2.

1.

$$\alpha^5 = \left(e^{\frac{i\pi}{5}}\right)^5 = e^{i\pi} = -1$$
$$\omega^5 = \left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5 = e^{2i\pi} = 1$$

2. Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\omega \neq 1$, donc
$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1-\omega^5}{1-\omega} = 0$$

3.
$$A = \alpha^5(\alpha + \alpha^{-1})(\alpha^2 + \alpha^{-2}) = (\alpha^6 + \alpha^4)(\alpha^2 + \alpha^{-2}) = \alpha^8 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^2 = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$$
$$= -1$$

4.
$$A = \alpha^5(\alpha + \alpha^{-1})(\alpha^2 + \alpha^{-2}) = -1\left(e^{\frac{i\pi}{5}} + e^{-\frac{i\pi}{5}}\right)\left(e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{-2i\pi}{5}}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \times 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$= -4\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Par conséquent
$$-4\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -1$$

D'où
$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}$$

Exercice 3.

Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour tout complexe par :
$$f(z) = (1+i)z + i$$

1. Déterminer le ou les points fixes de f.
2. Déterminer $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout z complexe, on ait :
$$f(z) = re^{i\theta}(z+1) - 1$$
3. Exprimer f comme la composée d'une rotation et d'une homothétie ayant le même centre.

Correction exercice 3.

1. Soit ω un point fixe de f
$$\omega = (1+i)\omega + i \Leftrightarrow \omega = \omega + \omega i + i \Leftrightarrow \omega i = -i \Leftrightarrow \omega = -1$$
2. Première méthode
$$f(z) = (1+i)z + i = (1+i)z + 1 + i - 1 = (1+i)(z+1) - 1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z+1) - 1$$
Donc $r = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ conviennent

Deuxième méthode

On cherche r et θ tels que pour $z \in \mathbb{C}$
$$re^{i\theta}(z+1) - 1 = (1+i)z + i \Leftrightarrow re^{i\theta}z + re^{i\theta} - 1 = (1+i)z + i \Leftrightarrow \begin{cases} re^{i\theta} = 1+i \\ re^{i\theta} - 1 = i \end{cases} \Leftrightarrow re^{i\theta} = 1 + i$$
Donc $r = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ conviennent car $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$.

3.

Soit h l'homothétie de centre $\omega = -1$ et de rapport $\sqrt{2} \neq 1$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
$$h(z) + 1 = \sqrt{2}(z+1) \Leftrightarrow h(z) = \sqrt{2}(z+1) - 1 = z'$$
Soit r la rotation de centre $\omega = -1$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$
$$r(z) + 1 = e^{i\frac{\pi}{4}}(z+1) \Leftrightarrow r(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}(z+1) - 1$$
$$r \circ h(z) = r(z') = e^{i\frac{\pi}{4}}(z'+1) = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{2}(z+1) - 1 + 1\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z+1) - 1 = f(z)$$

Donc f est la composée de la rotation de centre $\omega = -1$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$, donc avec $e^{i\frac{\pi}{4}} \neq 1$ et l'homothétie de centre $\omega = -1$ et de rapport $k = \sqrt{2}$

Exercice 4.

1. (Question de cours) Enoncé l'identité de Bézout
2. Calculer le PGCD de 222 et 117.
3. Trouver un couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $222x_0 + 117y_0 = 6$.
4. Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $222x + 117y = 6$

Correction exercice 4.

1. Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $PGCD(a, b) = d$, il existe une infinité de couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :
$$au + bv = d$$
2.
$$222 = 2 \times 111 = 2 \times 3 \times 37$$
$$117 = 3 \times 39$$
Donc $PGCD(222,117) = 3$
3.
$$222 = 1 \times 117 + 105$$
$$117 = 1 \times 105 + 12$$
$$105 = 8 \times 12 + 9$$
$$12 = 1 \times 9 + 3$$
$$9 = 3 \times 3$$
$$\begin{aligned} 3 = 12 - 1 \times 9 = 12 - 1 \times (105 - 8 \times 12) &= -1 \times 105 + 9 \times 12 \\ &= -1 \times 105 + 9 \times (117 - 1 \times 105) = 9 \times 117 - 10 \times 105 \\ &= 9 \times 117 - 10 \times (222 - 1 \times 117) = -10 \times 222 + 19 \times 117 \end{aligned}$$
On a donc $-10 \times 222 + 19 \times 117 = 3 \Leftrightarrow -20 \times 222 + 38 \times 117 = 6$, en multipliant par 2.
Une solution (x_0, y_0) est $(-20,38)$.
4.
$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 222x + 117y = 6 \\ -20 \times 222 + 38 \times 117 = 6 \end{cases}$$
$L_1 - L_2$ entraine que
$$222(x + 20) + 117(y - 38) = 0 \Leftrightarrow 222(x + 20) = -117(y - 38) \Leftrightarrow 74(x + 20) = -39(y - 38) \quad (1)$$
74 divise $-39(y - 38)$ et 74 et 39 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 74 divise $-(y - 38)$, par conséquent un entier k tel que :
$$-(y - 38) = 74k \quad (2) \Leftrightarrow y = -74k + 38$$
On remet (2) dans (1),
$$74(x + 20) = 39 \times 74k \Leftrightarrow x + 20 = 39k \Leftrightarrow x = -20 + 39k$$
La réciproque est évidente
L'ensemble des solutions est :
$$\{(-20 + 39k, 38 - 74k), k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 5.

On appelle $\beta = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$

Soit $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $\vec{u} = (x, y)$ par
$$p(\vec{u}) = p(x, y) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y, \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y\right)$$

1. Montrer que p est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice P de p dans la base canonique et montrer que p est une projection.
3. Donner un vecteur directeur de $\ker(p)$ et un vecteur directeur de $Im(p)$.
4. Soit $\overrightarrow{u_1} = (1,1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (1,-2)$, montrer que $\beta' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de p dans la base β'.

Correction exercice 5.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $\lambda' \in \mathbb{R}$, pour tout $\vec{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\overrightarrow{u'} = (x',y') \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} p\left(\lambda\vec{u} + \lambda'\overrightarrow{u'}\right) &= p(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y') \\ &= \left(\frac{2}{3}(\lambda x + \lambda' x') + \frac{1}{3}(\lambda y + \lambda' y'), \frac{2}{3}(\lambda x + \lambda' x') + \frac{1}{3}(\lambda y + \lambda' y')\right) \\ &= \left(\lambda\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y\right) + \lambda'\left(\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y'\right), \lambda\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y\right) + \lambda'\left(\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y'\right)\right) \\ &= \lambda\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y, \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y\right) + \lambda'\left(\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y', \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y'\right) = \lambda p(x,y) + \lambda' p(x',y') \\ &= \lambda p(\vec{u}) + \lambda p\left(\overrightarrow{u'}\right) \end{aligned}$$

Donc p est linéaire.

2.

$$p(\overrightarrow{e_1}) = p(1,0) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad et \quad p(\overrightarrow{e_2}) = p(0,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Donc la matrice P est

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} p(\overrightarrow{e_1}) & p(\overrightarrow{e_2}) \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \end{array} \end{array} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = P$$

Donc p est une projection.

3.

$\vec{u} \in \ker(p) \Leftrightarrow p(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y, \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y\right) = (0,0) \Leftrightarrow \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 0 \Leftrightarrow 2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$

Donc $\vec{u} = (x,-2x) = x(1,-2)$

Un vecteur directeur de $\ker(p)$ est $(1,-2) = e_1 - 2e_2$

Soit $\vec{v} \in Im(p)$, il existe $\vec{u} = (x,y)$ tel que

$$\vec{v} = p(\vec{u}) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y, \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y\right) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y\right)(1,1) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y\right)(e_1 + e_2)$$

Un vecteur directeur de $Im(p)$ est $(1,1) = e_1 + e_2$

4. $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas proportionnels donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$

$$p(\overrightarrow{u_1}) = p(1,1) = (1,1) = \overrightarrow{u_1}$$
$$p(\overrightarrow{u_2}) = p(1,-2) = (0,0) = \vec{0}$$

La matrice P' de p dans la base β' est donc

$$P' = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} p(\overrightarrow{u_1}) & p(\overrightarrow{u_2}) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{u_2} \end{array} \end{array}$$