Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « sciences et technologies »
Unité d'enseignement Algèbre I-Structures fondamentales
CONTRÔLE FINAL
5 Janvier-durée 2h

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1.

On définit une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ \forall n \geq 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$

Démontrer que

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n . F_{n+1}$$

Exercice 2.

Soit $\alpha = e^{\frac{i\pi}{5}}$ et $\omega = \alpha^2$

1. Calculer α^5 et ω^5.
2. Démontrer la relation
$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$$
3. Calculer A
$$A = \alpha^5(\alpha + \alpha^{-1})(\alpha^2 + \alpha^{-2})$$
4. Développer et simplifier l'expression $A = \alpha^5(\alpha + \alpha^{-1})(\alpha^2 + \alpha^{-2})$
En déduire que
$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}$$

Exercice 3.

Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour tout complexe par :

$$f(z) = (1+i)z + i$$

1. Déterminer le ou les points fixes de f.
2. Déterminer $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout z complexe, on ait :
$$f(z) = re^{i\theta}(z+1) - 1$$
3. Exprimer f comme la composée d'une rotation et d'une homothétie ayant le même centre.

Exercice 4.

1. (Question de cours) Enoncé l'identité de Bézout
2. Calculer le PGCD de 222 et 117.
3. Trouver un couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $222x_0 + 117y_0 = 6$.
4. Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $222x + 117y = 6$

Exercice 5.

On appelle $\beta = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$

Soit $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $\vec{u} = (x, y)$ par

$$p(\vec{u}) = p(x,y) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y, \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y\right)$$

1. Montrer que p est une application linéaire.

2. Déterminer la matrice P de p dans la base canonique et montrer que p est une projection.
3. Donner un vecteur directeur de $\ker(p)$ et un vecteur directeur de $Im(p)$.
4. Soit $\overrightarrow{u_1} = (1,1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (1,-2)$, montrer que $\beta' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de p dans la base β'.