**Université Claude Bernard Lyon 1**
**43, boulevard du 11 novembre 1918**
**69622 Villeurbanne cedex, France**

Licence Sciences et technologie
Mathématiques, informatiques, Math et économie

**Analyse I-Contrôle continu final du 7 janvier 2015**

Barème sur 40 points

Exercice 1. (6 points)

1. (2 points) Calculez
$$\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1-u)}{u}$$
2. (2 points) En déduire
$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$$
3. (2 points) En déduire
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Correction exercice 1.

1. On pose $f(u)=\ln(1-u)$ et $g(u)=u$, la limite de $f(u)/g(u)$ est indéterminée en 0
$$\frac{f'(u)}{g'(u)}=\frac{\frac{-1}{1-u}}{1}=-\frac{-1}{1-u}\xrightarrow[u\to 0]{}-1$$
D'après la règle de L'Hospital
$$\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1-u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{f'(u)}{g'(u)}=-1$$
2. On pose $x=\frac{1}{u}$ donc $u=\frac{1}{x}$
$$x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln(1-u)}{u}$$
Par conséquent
$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1-u)}{u}=-1$$
3. $$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$
Donc
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Exercice 2. (14 points)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x} & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ x\ln(x) & \text{si } x>0\end{cases}$$

1. (2 points) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. (2 points) Calculer $f'(x)$ pour $x<0$ et pour $x>0$.
3. (2 point) Calculer les limites de $f'(x)$ lorsque $x\to 0^-$ et lorsque $x\to 0^+$.
4. (1 points) $f$ est-elle dérivable en 0 ? On précisera l'allure de la tangente en $x=0$.

5. (4 points) Dresser le tableau de variation de $f$ et tracer le graphe de $f$ (on tracera les tangentes remarquables).
6. (3 points) Montrer que $f$ de $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ sur $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$ est une bijection. Calculer $(f^{-1})'(0)$.

Correction exercice 2.

1.

$$\lim_{x\to 0^-} \ln(-x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \sqrt{-x} = 0 = f(0)$$
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 = f(0)$$

Il s'agit d'une forme indéterminée dont le résultat est connu.
Par conséquent $f$ est continue en 0, pour $x \neq 0$ $f$ est le produit ou la composée de fonctions continues donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Si $x < 0$, $f(x) = (-x)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(-1)(-x)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{-x}}$$

Si $x > 0$

$$f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

3.

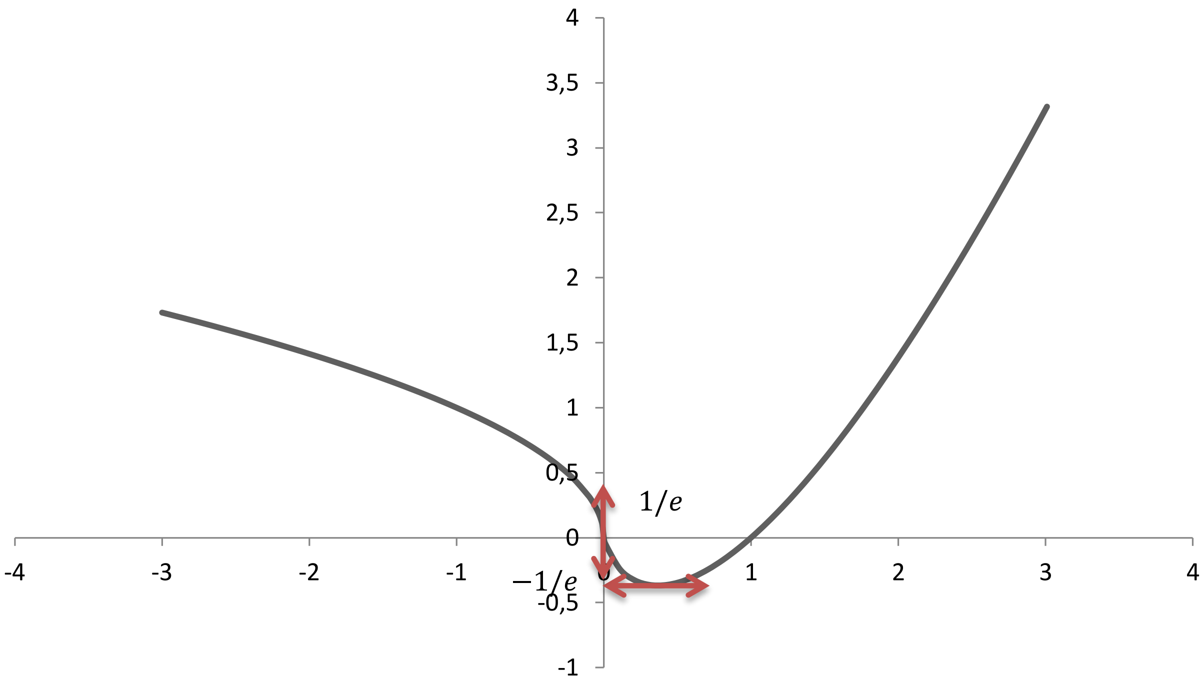
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{2\sqrt{-x}} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (\ln(x) + 1) = -\infty$$

4. Les limites de $f'$ en $0^-$ et $0^+$ ne sont pas finies donc $f$ n'est pas dérivable en 0. La limite de $f'$ en 0 est $-\infty$ donc la courbe admet une tangente verticale.
5. Pour $x < 0$, $f'(x) < 0$ donc la fonction est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^{*-}$.
Pour $x > 0$, $f'(x) = 0$ si et seulement si $\ln(x) = -1$ si et seulement si $x = e^{-1}$.
Pour $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$, $f'(x) < 0$ donc $f$ est décroissante, pour $x > \frac{1}{e}$, $f'(x) > 0$ donc $f$ est croissante.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1/e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ ‖ $0$ | ↘ | $-1/e$ | ↗ | |

Car

$$\lim_{x\to -\infty} \ln(-x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$$
$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln(e^{-1}) = \frac{-1}{e}$$
$$\lim_{x\to +\infty} x\ln(x) = +\infty$$




6. $f$ est une fonction continue strictement croissante sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ et $f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$ donc la $f$ est une bijection.

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 1$$

Et

$$f'(x) = 1 + \ln(x)$$

Donc

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(0)\big)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1 + \ln(1)} = 1$$

Exercice 3. (6 points)

Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

1. (2 points) Montrer que $u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$
2. (2 points) Montrer que si $n \geq 1$ alors $u_n \geq \sqrt{a}$, puis que la suite est décroissante.
3. (2 points) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$

Correction exercice 3.

1.

$$u_{n+1}^2 - a = \left(\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(u_n^2 + 2a + \frac{a^2}{u_n^2}\right) - a = \frac{1}{4}\left(u_n^2 + 2a + \frac{a^2}{u_n^2} - 4a\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(u_n^2 - 2a + \frac{a^2}{u_n^2}\right) = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$$

2. Pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1}^2 - a \geq 0$, donc pour tout $n \geq 1$, $u_n^2 - a \geq 0$. Par une récurrence assez simple, il est clair que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 0$, on en déduit que $u_n^2 \geq a$ entraine que $u_n \geq \sqrt{a}$
3. Pour tout $n \geq 0$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - u_n = \frac{u_n^2 + a - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{a - u_n^2}{2u_n} \leq 0$$

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc elle converge vers une limite $l$.
Puis en faisant tendre $n$ vers $+\infty$ dans

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)$$

On trouve

$$l=\frac{1}{2}\left(l+\frac{a}{l}\right)$$

En multipliant cette égalité par $2l$

$$2l^2=l^2+a$$

D'où $l^2=a$, puis comme $l>0$, on a $l=\sqrt{a}$.

Exercice 4.

Soient $a$ et $b$ des réels tels que $0<a<b$.

1. On considère la fonction $\ln\ : x\to \ln(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$
   a. (2 points) Enoncer le théorème des accroissements finis appliqué à $\ln$ entre $a$ et $b$. En déduire qu'il existe $c\in\,]a,b[$ tel que

$$(1)\qquad \frac{b-a}{c}=\ln(b)-\ln(a)$$

   b. (1 point) Déduire de la question précédente que

$$(2)\qquad \frac{b-a}{b}<\ln(b)-\ln(a)<\frac{b-a}{a}$$

2. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, de classe $C^1$ sur $[0,1]$ (c'est-à-dire qu'elle est continue, dérivable et de dérivée continue sur $[0,1]$) et telle que $f''$ existe sur $]0,1[$ telle que :

$$f(0)=0; f(1)=0; f'(0)>0 \quad \text{et} \quad f'(1)<0$$

   De plus on supposera que $\forall x\in\,]0,1[, f''(x)<0$.
   a. (2 points) Faire un dessin représentant le graphe d'une fonction vérifiant ces hypothèses.
   b. (1 point) Montrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $x\in[0,\alpha]$, $f'(x)>0$.
   c. (1 point) Montrer que $f(\alpha)>0$.
   d. On suppose qu'il existe $\beta\in\,]0,1[$ tel que $f(\beta)=0$, montrer qu'il existe $c_1\in\,]0,\beta[$ et $c_2\in\,]\beta,1[$ tel que :
      i) (1 point) $f'(c_1)=f'(c_2)=0$,
      ii) (1 point) En déduire que l'on obtient une contradiction.
   e. (1 point) Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout $x\in\,]0,1[$.
3. On considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x)=\ln(xa+(1-x)b)-x\ln(a)-(1-x)\ln(b)$$

   a. (3 points) Montrer que $f$ vérifie les hypothèses de la question 2.
   b. (1 point) Montrer que pour tout $x\in\,]0,1[$

$$\ln(xa+(1-x)b)>x\ln(a)+(1-x)\ln(b)$$

Correction exercice 4.

1.
   a. $\ln\ : x\to\ln(x)$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $\ln$ entre $a$ et $b$. $\ln'(x)=\frac{1}{x}$ donc il existe $c\in\,]a,b[$ tel que :

$$\ln(b)-\ln(a)=(b-a)\times\frac{1}{c}$$

   b.

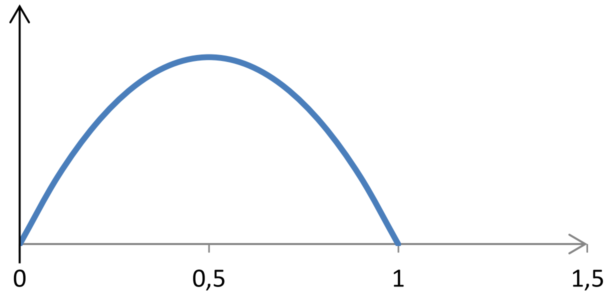
$$0<a<c<b\Rightarrow\frac{1}{b}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{b-a}{b}<\frac{b-a}{c}<\frac{b-a}{a}$$

   Car $b-a>0$.
   Donc

$$\frac{b-a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b-a}{a}$$

2.

a.




b. Première méthode :

$f(0) = f(1)$ et $f$ est $C^1$ sur $[0,1]$ d'après le théorème de Rolle il existe $\alpha \in ]0.1[$ tel que $f'(\alpha) = 0$, la fonction $f'$ étant strictement décroissante, pour tout $x$ tel que

$$0 < x < \alpha \Rightarrow f'(0) > f'(x) > f'(\alpha) = 0$$

Deuxième méthode :

$f'$ est continue et $f'(0) > 0$ donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha \geq 0$ tel que pour tout $x \in [0, \alpha]$

$$|f'(x) - f'(0)| < \epsilon$$

Ce qui entraine que

$$f'(0) - \epsilon < f'(x) < f'(0) + \epsilon$$

Il suffit de prendre $\epsilon = \frac{f'(0)}{2}$ pour montrer que pour tout $x \in [0, \alpha]$, $f'(x) > 0$.

c. Première méthode :

Appliquons le théorème des accroissements finis entre $0$ et $\alpha$, les hypothèses sont évidemment vérifiées, il existe $c \in ]0, \alpha[$ tel que

$$f(\alpha) - f(0) = \alpha f'(c)$$

Comme $f(0) = 0$ et $f'(c) > 0$, on a $f(\alpha) > 0$

Deuxième méthode :

D'après 2.a. la dérivée est strictement positive sur l'intervalle $]0, \alpha]$ et la fonction est nulle en 0 donc elle est strictement croissante sur $[0, \alpha]$, par conséquent $0 < \alpha \Rightarrow 0 = f(0) < f(\alpha)$.

d.

i) S'il existe $\beta \in ]0,1[$ tel que $f(\beta) = 0$, les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées entre $0$ et $\beta$ et entre $\beta$ et $1$ donc il existe $c_1 \in ]0, \beta[$ et $c_2 \in ]\beta, 1[$ tel que $f'(c_1) = 0$ et $f'(c_2) = 0$,

ii) comme $f''(x) < 0$ entraine que $f'$ étant strictement décroissante ce « $c$ » est unique, d'où la contradiction

e. Première solution

D'après 2.c. il existe une valeur $\alpha \in ]0,1[$ telle que $f(\alpha) > 0$, d'après 2.d. $f$ ne s'annule pas sur $]0,1[$ et $f$ est continue, par conséquent pour tout $x \in ]0,1[$, $f(x) > 0$.

Deuxième solution

$f$ est croissante sur $[0, c]$ donc $0 \leq x \leq c$ entraine que $0 = f(0) \leq f(x)$

$f$ est décroissante sur $[c, 1]$ donc $c \leq x \leq 1$ entraine que $f(x) \geq f(1) = 0$

Donc pour tout $x \in [0,1]$ , $f(x) \geq 0$

3.

a. Soit $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = ax + (1-x)b$

$$g(0) = b; \quad g(1) = a; \quad g'(x) = a - b < 0$$

Donc $g$ est une bijection décroissante de $[0,1]$ sur $[a, b]$ en fait le fait que $g$ soit bijective n'a pas beaucoup d'importance mais cela permet d'affirmer facilement que $g([0,1]) = [a, b]$ et donc que

$g(x) > 0$ sur $[0,1]$, le reste de la fonction ne pose pas de problème donc $f$ est définie, continue, et dérivable autant de fois que l'on veut.

$$f(0) = \ln(0 \times a + (1-0)b) - 0 \times \ln(a) - (1-0)\ln(b) = \ln(b) - \ln(b) = 0$$

$$f(1) = \ln(1 \times a + (1-1)b) - 1 \times \ln(a) - (1-1)\ln(b) = \ln(a) - \ln(a) = 0$$

$$\forall x \in [0,1], \qquad f'(x) = \frac{a-b}{xa+(1-x)b} - \ln(a) + \ln(b)$$

$$\forall x \in [0,1], \qquad f''(x) = -\frac{(a-b)(a-b)}{(xa+(1-x)b)^2} = -\frac{(a-b)^2}{(xa+(1-x)b)^2} < 0$$

$$f'(0) = \frac{a-b}{b} + \ln(b) - \ln(a) > \frac{a-b}{b} + \frac{b-a}{b} = 0$$

D'après 1. Inégalité de gauche.

$$f'(1) = \frac{a-b}{a} + \ln(b) - \ln(a) < \frac{a-b}{a} + \frac{b-a}{a} = 0$$

D'après 1. Inégalité de droite.

b. D'après 2.e. la fonction $f$ est strictement positive sur $]0,1[$ donc

$$\ln(xa+(1-x)b) - x\ln(a) - (1-x)\ln(b) > 0$$

Autrement dit

$$\forall x \in ]0,1[, \qquad x\ln(a) + (1-x)\ln(b) < \ln(xa+(1-x)b)$$