Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences et technologie
Mathématiques, informatiques, Math et économie

Analyse I-Contrôle continu final du 7 janvier 2015

Barème sur 40 points

Exercice 1. (6 points)

1. (2 points) Calculez
$$\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1-u)}{u}$$
2. (2 points) En déduire
$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$$
3. (2 points) En déduire
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 2. (14 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x} & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ x\ln(x) & \text{si } x>0\end{cases}$$

1. (2 points) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. (2 points) Calculer $f'(x)$ pour $x<0$ et pour $x>0$.
3. (2 point) Calculer les limites de $f'(x)$ lorsque $x\to 0^-$ et lorsque $x\to 0^+$.
4. (1 points) f est-elle dérivable en 0 ? On précisera l'allure de la tangente en $x=0$.
5. (4 points) Dresser le tableau de variation de f et tracer le graphe de f (on tracera les tangentes remarquables).
6. (3 points) Montrer que f de $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$ sur $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right[$ est une bijection. Calculer $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 3. (6 points)

Soit $a>0$. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ $u_0>0$ et la relation de récurrence
$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)$$

1. (2 points) Montrer que $u_{n+1}^2-a=\frac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2}$
2. (2 points) Montrer que si $n\geq 1$ alors $u_n\geq\sqrt{a}$, puis que la suite est décroissante.
3. (2 points) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\sqrt{a}$

Exercice 4.

Soient a et b des réels tels que $0<a<b$.

1. On considère la fonction $\ln\ : x\to\ln(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$
   a. (2 points) Enoncer le théorème des accroissements finis appliqué à ln entre a et b. En déduire qu'il existe $c\in\ ]a,b[$ tel que
   $$(1)\qquad \frac{b-a}{c}=\ln(b)-\ln(a)$$
   b. (1 point) Déduire de la question précédente que
   $$(2)\qquad \frac{b-a}{b}<\ln(b)-\ln(a)<\frac{b-a}{a}$$

2. Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, de classe C^1 sur $[0,1]$ (c'est-à-dire qu'elle est continue, dérivable et de dérivée continue sur $[0,1]$) et telle que f'' existe sur $]0,1[$ telle que :

$$f(0) = 0; f(1) = 0; f'(0) > 0 \quad \text{et} \quad f'(1) < 0$$

De plus on supposera que $\forall x \in]0,1[, f''(x) < 0$.

a. (2 points) Faire un dessin représentant le graphe d'une fonction vérifiant ces hypothèses.

b. (1 point) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \alpha]$, $f'(x) > 0$.

c. (1 point) Montrer que $f(\alpha) > 0$.

d. On suppose qu'il existe $\beta \in]0,1[$ tel que $f(\beta) = 0$, montrer qu'il existe $c_1 \in]0, \beta[$ et $c_2 \in]\beta, 1[$ tel que :

i) (1 point) $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$,

ii) (1 point) En déduire que l'on obtient une contradiction.

e. (1 point) Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout $x \in]0,1[$.

3. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(xa + (1-x)b) - x\ln(a) - (1-x)\ln(b)$$

a. (3 points) Montrer que f vérifie les hypothèses de la question 2.

b. (1 point) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$

$$\ln(xa + (1-x)b) > x\ln(a) + (1-x)\ln(b)$$