Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « sciences et technologique »
CONTRÔLE FINAL
9 Janvier-durée 2h

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

Correction exercice 1.

Pour $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1}(-1)^k k^2 = (-1)^1 \times 1^2 = -1$$

Et

$$(-1)^1 \frac{1(1+1)}{2} = -1$$

L'égalité est vraie pour $n = 1$

Montrons que l'égalité au rang n entraine celle au rang $n+1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 &= (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2}(n+1)\big(-n+2(n+1)\big) = \frac{(-1)^{n+1}}{2}(n+1)(-n+2n+2) \\ &= (-1)^{n+1}\frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence donc pour tout $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 2.

1. Calculer le pgcd de 224 et 119.
2. Donner $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $224u + 119v = pgcd(224,119)$
3. Déterminer l'ensemble des solutions pur $x \in \mathbb{Z}$ du système

$$x \equiv 3 \mod 224 \qquad \text{et} \qquad x \equiv 17 \mod 119$$

Correction exercice 2.

1.

$$\begin{gathered}224 = 1 \times 119 + 105 \\ 119 = 1 \times 105 + 14 \\ 105 = 7 \times 14 + 7 \\ 14 = 2 \times 7 + 0\end{gathered}$$

Donc $pgcd(224,119) = 7$

2. D'après les égalités du 1.

$$\begin{aligned}7 = 105 - 7 \times 14 = 105 - 7(119 - 1 \times 105) &= -7 \times 119 + 8 \times 105 \\ &= -7 \times 119 + 8(224 - 1 \times 119) = 8 \times 224 - 15 \times 119\end{aligned}$$

Un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $224u + 119v = 7$ est $(8, -15)$

3. Il existe k et l deux entiers tels que

$$x = 3 + 224k \quad \text{et} \quad x = 17 + 119l$$

Par conséquent

$$3 + 224k = 17 + 119l$$

Ce qui équivaut à $224k - 119l = 14 \quad L_1$

D'après l'égalité $8 \times 224 - 15 \times 119 = 7$ on en déduit que $16 \times 224 - 30 \times 119 = 14 \quad L_2$

Calculons $L_1 - L_2$

$$224(k - 16) - 119(l - 30) = 0$$

Par conséquent

$$224(k - 16) = 119(l - 30)$$

Puis on divise par le $pgcd(224,119) = 7$

$$32(k - 16) = 17(l - 30)$$

$$\begin{cases} 32|17(l - 30) \\ 32 \wedge 17 = 1 \end{cases}$$

D'après le théorème de Gauss 32 divise $l - 30$, donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $l - 30 = 32a$ soit

$$l = 30 + 32n$$

On remplace $l - 30 = 32n$ dans $32(k - 16) = 17(l - 30)$, ce qui donne

$$32(k - 16) = 17 \times 32n$$

On simplifie par 32, pour trouver que $k - 16 = 17n$ ou encore $k = 16 + 17n$

La réciproque est évidente d'où l'ensemble des solutions

$$(16 + 17n, 30 + 32n)$$

On remplace l'un ou l'autre dans $x = 3 + 224k$ ou dans $x = 17 + 119l$

$$x = 3 + 224(16 + 17l) = 3 + 3584 + 3808l = 3587 + 3808l$$

Exercice 3.

1. Déterminer les racines carrées de $15 + 8i$ sous forme algébrique
2. Résoudre, pour $z \in \mathbb{C}$, l'équation

$$z^2 + (1 - 2i)z - \frac{9}{2} - 3i = 0$$

Indication : $15^2 = 225, ; 16^2 = 256, ; 17^2 = 289;\ 18^2 = 324; 19^2 = 361.$

Correction exercice 3.

1. On cherche a et b réels tels que $(a + ib)^2 = 15 + 8i \quad (*)$

$$(a + ib)^2 = 15 + 8i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = 15 + 8i \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} a^2 - b^2 = 15 \\ 2ab = 8 \end{cases}$$

En prenant le module dans l'égalité $(*)$

$$|(a + ib)^2| = \sqrt{15^2 + 8^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17 \quad L_3$$

En faisant la somme de L_3 et de L_1 on trouve $2a^2 = 32$ donc $a^2 = 16$ d'où $a = \pm 4$

En faisant la différence de L_3 et de L_1 on trouve $2b^2 = 2$ donc $b^2 = 1$ d'où $b = \pm 1$

D'après L_2, $ab > 0$ donc a et b ont le même signe

Les deux racines carrées de $15 + 8i$ sont

$$4 + i \quad \text{et} \quad -4 - i$$

2. Les racines de l'équation sont

$$\frac{-(1 - 2i) - (4 + i)}{2} = \frac{-5 + i}{2} = -\frac{5}{2} + \frac{i}{2}$$

Et

$$\frac{-(1 - 2i) + 4 + i}{2} = \frac{3 + 3i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

Exercice 4.

Montrer que pour tout couple de réels (α, β) on a

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Et

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Correction exercice 4.

Première méthode

$$\begin{aligned}2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)&=2\frac{e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}}{2}\times\frac{e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha}+e^{i\beta}+e^{-i\beta}+e^{-i\alpha}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}+e^{i\beta}+e^{-i\beta}\right)=\frac{1}{2}(2\cos(\alpha)+2\cos(\beta))\\&=\cos(\alpha)+\cos(\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)&=2\frac{e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}-e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}}{2i}\times\frac{e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}}{2}\\&=\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}-e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}-e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)\\&=\frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha}+e^{i\beta}-e^{-i\beta}-e^{-i\alpha}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}+e^{i\beta}-e^{-i\beta}\right)\\&=\frac{1}{2i}(2i\sin(\alpha)+2i\sin(\beta))=\sin(\alpha)+\sin(\beta)\end{aligned}$$

Deuxième méthode

$$\begin{aligned}\cos(\alpha)+\cos(\beta)+i(\sin(\alpha)+\sin(\beta))&=\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)+(\cos(\beta)+i\sin(\beta))=e^{i\alpha}+e^{i\beta}\\&=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{i\frac{-\alpha+\beta}{2}}\right)=\left(\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)\times2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\&=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+i\,2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{aligned}$$

Puis en identifiant les parties réelle et imaginaire on trouve que

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Et

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Exercice 5.

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x,y)=\left(2x-y,\frac{y}{2}-x\right)$

1. Montrer que f est une application linéaire, et donner sa matrice dans la base canonique.
2. Calculer le déterminant de f. L'application f est-elle bijective ?
3. Soit $I=\{f(\vec{v}):\vec{v}\in\mathbb{R}^2\}$ l'image de f.montrer que I est la droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{u_1}=f(1,0)$
4. Soit $K=\left\{\vec{v}\in\mathbb{R}^2:f(\vec{v})=\vec{0}\right\}$ le noyau de f. Montrer K est une droite vectorielle et en donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$.
5. Montrer que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Calculer $f(\overrightarrow{u_1})$ et $f(\overrightarrow{u_2})$ dans la base canonique, puis dans la base $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$. En déduire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$.

Correction exercice 5.

1. Soient $\vec{u}=(x,y)$ et $\overrightarrow{u'}=(x',y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et soient λ et λ' deux réels.

$$\lambda\vec{u}+\lambda'\overrightarrow{u'}=\lambda(x,y)+\lambda'(x',y')=(\lambda x+\lambda'x',\lambda y+\lambda'y')$$

$$f\left(\lambda\vec{u}+\lambda'\overrightarrow{u'}\right)=\left(2(\lambda x+\lambda' x')-(\lambda y+\lambda' y'),\frac{\lambda y+\lambda' y'}{2}-(\lambda x+\lambda' x')\right)$$
$$=\left(\lambda(2x-y)+\lambda'(2x'-y'),\lambda\left(\frac{y}{2}-x\right)+\lambda'\left(\frac{y'}{2}-x'\right)\right)=\lambda f(\vec{u})+\lambda' f\left(\overrightarrow{u'}\right)$$

Ce qui montre que f est linéaire.

$$f(\vec{\imath})=f(1,0)=(2,-1)\qquad \text{et}\qquad f(\vec{\jmath})=f(0,1)=\left(-1,\frac{1}{2}\right)$$

$$Mat_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(f)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

2.

$$\det(f)=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=1-1=0$$

L'application n'est pas bijective.

3. Soit $\vec{v}\in I$, il existe x et y réels tels que

$$\vec{v}=\left(2x-y,\frac{y}{2}-x\right)=\left(2x-y,-\frac{1}{2}(2x-y)\right)=(2x-y)\left(1,-\frac{1}{2}\right)$$
$$f(1,0)=(2,-1)$$

Donc tous les vecteurs de I sont proportionnels à $\overrightarrow{u_2}=\left(1,-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(2,-1)=\frac{1}{2}(2\vec{\imath}-\vec{\jmath})$, autrement dit I est la droite vectorielle engendré par $\overrightarrow{u_1}=f(1,0)$.

4. Soit $\vec{u}=(x,y)\in K$

$$\begin{cases}2x-y=0\\ \frac{y}{2}-x=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\ L_2\end{matrix}\begin{cases}2x-y=0\\ -x+\frac{y}{2}=0\end{cases}$$

Le déterminant du système est

$$\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=1-1=0$$

Donc ce n'est pas un système de Cramer, d'ailleurs, il est à peu près clair que $-2L_2=L_1$

Donc $\vec{u}\in I$ équivaut à $y=2x$ donc $\vec{u}=(x,2x)=x(1,2)$

Ce qui montre que K est la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{u_2}=(1,2)=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$

5.

$$\det(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=4+1=5\neq 0$$

Donc $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$

6.

$$f(\overrightarrow{u_1})=f(2,-1)=\left(2\times 2+1,\frac{-1}{2}-2\right)=\left(5,-\frac{5}{2}\right)=5\vec{\imath}-\frac{5}{2}\vec{\jmath}=\frac{5}{2}(2\vec{\imath}-\vec{\jmath})=\frac{5}{2}\overrightarrow{u_1}$$
$$f(\overrightarrow{u_2})=\left(2\times 1-2,\frac{2}{2}-1\right)=(0,0)=\vec{0}$$

Donc la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ est

$$\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$