Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « sciences et technologique »
CONTRÔLE FINAL
9 Janvier-durée 2h

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 2.

1. Calculer le pgcd de 224 et 119.
2. Donner $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $224u + 119v = pgcd(224,119)$
3. Déterminer l'ensemble des solutions pur $x \in \mathbb{Z}$ du système

$$x \equiv 3 \mod 224 \qquad \text{et} \qquad x \equiv 17 \mod 119$$

Exercice 3.

1. Déterminer les racines carrées de $15 + 8i$ sous forme algébrique
2. Résoudre, pour $z \in \mathbb{C}$, l'équation

$$z^2 + (1 - 2i)z - \frac{9}{2} - 3i = 0$$

Indication : $15^2 = 225, ; 16^2 = 256, ; 17^2 = 289;\ 18^2 = 324; 19^2 = 361.$

Exercice 4.

Montrer que pour tout couple de réels (α, β) on a

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Et

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Exercice 5.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = \left(2x - y, \frac{y}{2} - x\right)$

1. Montrer que f est une application linéaire, et donner sa matrice dans la base canonique.
2. Calculer le déterminant de f. L'application f est-elle bijective ?
3. Soit $I = \{f(\vec{v}) : \vec{v} \in \mathbb{R}^2\}$ l'image de f.montrer que I est la droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{u_1} = f(1,0)$
4. Soit $K = \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 : f(\vec{v}) = \vec{0}\right\}$ le noyau de f. Montrer K est une droite vectorielle et en donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$.
5. Montrer que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Calculer $f(\overrightarrow{u_1})$ et $f(\overrightarrow{u_2})$ dans la base canonique, puis dans la base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$. En déduire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.