

Contrôle continu final
Le 8 Janvier 2014. Durée 2 heures

Documents et appareils électroniques interdits.

Exercice 1. (10,8 p) Soit

$$f: \mathbb{R} \rightarrow A, \text{ donné par : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ici A est l'image de f (que l'on déterminera au cours de l'exercice).

1. (1,8 p) Montrer que f est dérivable.
2. (1,2 p) Montrer que la dérivée f' de f est continue.
3. (0,5 p) Montrer que f' n'est pas dérivable.
4. (0,6 p) Déterminer le tableau de variation de f .
5. * (1,8 p) Tracer le graphe de f . Au passage, étudier l'existence des asymptotes au graphe, et la position du graphe par rapport aux asymptotes
6. (1,2 p) Déterminer l'image A de la fonction f .
7. (0,6p) Montrer que $f: \mathbb{R} \rightarrow A$ admet une fonction réciproque, que l'on note $h: A \rightarrow \mathbb{R}$.
8. Trouver h .
9. * (1,8 p) Notons g la restriction de f à $]0, +\infty[$, trouver la formule de $g^{(n)}$ (la dérivée n -ième de g) pour $n \geq 1$. On justifiera la réponse.

Correction exercice 1.

1. Si $x \neq 0$ alors f est le quotient de fonctions dérivable donc f est dérivable
En $x = 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{1 + |x|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Donc f est dérivable en $x = 0$.

2. Si $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1 \times (1+x) - x \times 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Si $x < 0$,

$$f'(x) = \frac{1 \times (1-x) - x \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

f est continue en 0 et $f'(x)$ admet une limite en 0 donc f est de classe C^1 (donc f' est continue).

3. Si $x > 0$

$$f''(x) = \frac{-2}{(1+x)^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -2$$

Si $x < 0$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$$

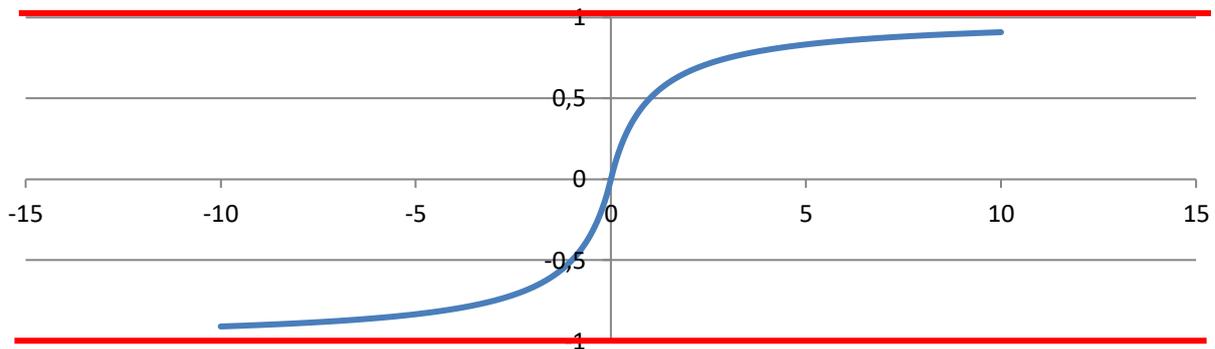
Les limites à gauche et à droite ne sont pas les mêmes donc f' n'est pas dérivable en 0.

4. Que $x < 0$, $x = 0$ ou que $x > 0$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-x} = -1$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x} = 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	1	$+$
$f(x)$	-1		

5.



Le graphe de f admet deux asymptotes horizontales d'équation $y = -1$ et $y = 1$, la courbe se situe au-dessus de l'asymptote $y = -1$ et au-dessous l'asymptote d'équation $y = 1$.

6. $A = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-1,1[.$

7. f est strictement croissante donc f est injective, $f(\mathbb{R}) = A$ donc $f: \mathbb{R} \rightarrow A$ est surjective, par conséquent elle admet une bijection réciproque.

8. Pour tout $x < 0$,

$$y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow y(1-x) = x \Leftrightarrow y - xy = x \Leftrightarrow y = x + xy \Leftrightarrow x(1+y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}$$

D'après le tableau de variation $x < 0 \Leftrightarrow y \in]-1,0[$ donc pour tout $y \in]-1,0[$

$$h(y) = \frac{y}{1+y}$$

Pour tout $x \geq 0$,

$$y = \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow y(1+x) = x \Leftrightarrow y + xy = x \Leftrightarrow y = x - xy \Leftrightarrow x(1-y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

D'après le tableau de variation $x \geq 0 \Leftrightarrow y \in [0,1[$ donc pour tout $y \in [0,1[$

$$h(y) = \frac{y}{1-y}$$

En résumé

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x \in]-1,0[\\ \frac{x}{1-x} & \text{si } x \in [0,1[\end{cases}$$

Donc h est convexe.

9. Pour $x > 0$ alors $g(x) = \frac{x}{1+x}$, on en déduit que

$$g'(x) = \frac{1 \times (1+x) - x \times 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}$$

$$g''(x) = -2(1+x)^{-3}; \quad g'''(x) = (-1)^2 \times 3 \times 2(1+x)^{-4}$$

Supposons que

$$g^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}n!(1+x)^{-(n+1)}$$

C'est vrai pour $n = 1$ (pour $n = 2$ et $n = 3$ aussi)

$$g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}\right)'(x) = (-1)^{n+1}n!(-n-1)(1+x)^{-(n+2)} = (-1)^{n+2}(n+1)!(1+x)^{-(n+2)}$$

Ce qui achève la récurrence, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

On considère l'équation différentielle suivante :

(1) $y' = -\frac{y}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, avec $x > 0$.

1. (1,8 p calcul+1,2 p vérification) Montrer que

(2) $y_0:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, y_0(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}, x > 0$,

Est solution de (3).

2. (1,8 p équation homogène+1,2 p sol. générale) Trouver toutes les solutions de (3).

3. (0,6 p) Donner la solution de (3) vérifiant $y(1) = \sqrt{2} - 1$

4. (1,8 p) écrire ce qu'il faut faire, (calcul, limite, justification) Montrer que la fonction y de la question précédente se prolonge par continuité à droite en 0.

Correction exercice 2.

1. $\forall x > 0, y_0(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

$$y_0'(x) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \times x - \sqrt{x^2+1} \times 1}{x^2} = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$y_0'(x) + \frac{y_0(x)}{x} = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}} + \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{x} = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = \frac{-1 + (x^2+1)}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Donc y_0 est bien solution de (3).

2. Il faut chercher la solution générale de l'équation homogène

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \ln|y| = -\ln(x) + K \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, y = \lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}$$

Donc la solution générale de (3) est :

$$y = \frac{\lambda}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

3.

$$y(1) = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \lambda + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

$$y(x) = \frac{-1 + \sqrt{x^2+1}}{x}$$

4.

$$y(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} = \frac{x^2 + 1 - 1}{x(\sqrt{x^2+1} + 1)} = \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1} + 1)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

Donc cette fonction est prolongeable par continuité à droite en $x = 0$.

Exercice 3. (6,6 p)

1. (1,2 p) Soit $x > 0$. Montrer qu'il existe un $c = c(x) \in]0, x[$ tel que :

(3) $e^x - 1 = xe^c$

Le but de cet exercice est de préciser la position de c par rapport au milieu $\frac{x}{2}$ de l'intervalle $]0, x[$. Pour ce faire, nous introduisons la fonction :

$f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x$

2. (1,2 p variation, signe) Dresser le tableau de variation de la dérivée f' de f . Quel est le signe de f' sur $]0, +\infty[$?

3. (1,8 p variation, valeur limite à l'infini) Utiliser la question précédente pour dresser le tableau de variation de f .

4. (0,6 p) En déduire l'inégalité

$$f(x) > 0, \forall x > 0$$

5. (0,6 p) En déduire que

$$e^x - 1 > xe^{\frac{x}{2}}$$

6. (1,2 p) Enfin, obtenir que $c(x) \in]\frac{x}{2}, x[$.

Correction exercice 3.

1. La fonction exponentielle définie sur $[0, x]$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ d'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$e^x - e^0 = (x - 0)e^c \Leftrightarrow e^x - 1 = xe^c$$

2. $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 1$ et $f''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}$

On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 0$$

Et $f''(x) > 0$ pour tout $x > 0$

$$f'(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

On déduit de cela le tableau de variation de f'

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	0	+
$f'(x)$	0	$\nearrow +\infty$

Donc pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$

3.

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}}(1 - e^{-x} - xe^{-x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(0) = 1 - 1 - 0 = 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	$\nearrow +\infty$

4. Par conséquent, pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.

5. Pour tout $x > 0$

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} > x \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) > xe^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow e^x - 1 > xe^{\frac{x}{2}}$$

6. Pour tout $x > 0$

$$e^x - 1 = xe^c > xe^{\frac{x}{2}}$$

Comme $x > 0$ cela entraîne que $e^c > e^{\frac{x}{2}}$ et que donc $c > \frac{x}{2}$ et d'autre part $c < x$, on a bien l'encadrement souhaiter.

Exercice 4. (6,6 p)

Partie I. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$, soit

(4)

$$z_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^n u_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j$$

On pose aussi

(5) $x_n = z_{2n}$ et $y_n = z_{2n-1}$, $\forall n \geq 1$

- (1,2 p) Donner les valeurs de $z_1, z_2, z_3, z_4, x_1, x_2, y_1$ et y_2
- (1,8 p monotonie (x_n) , monotonie (y_n) , $y_n - x_n \rightarrow 0$) Montrer que les suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.
- (1,2 p) En déduire que la suite $(z_n)_{n \geq 1}$ converge.

Partie II. Dans cette partie, nous considérons une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ décroissante et qui converge vers 0. (Attention, il ne s'agit pas forcément de la suite donnée par $u_n = \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$).

Nous définissons les suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ par les formules (4) et (5)

- * (1,8 p monotonie (x_n) , monotonie (y_n) , $y_n - x_n \rightarrow 0$, recollement) Montrer que les suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes. Conclusion ?

Correction exercice 4.

Partie I.

1.

$$\begin{aligned} z_1 &= u_1 = 1 \\ z_2 &= u_1 - u_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ z_3 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \\ z_4 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \\ x_1 &= z_2 = \frac{1}{2} \\ x_2 &= z_4 = \frac{7}{12} \\ y_1 &= z_1 = 1 \\ y_2 &= z_3 = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= z_{2n+2} - z_{2n} \\ &= u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{2n-1}u_{2n} + (-1)^{2n}u_{2n+1} + (-1)^{2n+1}u_{2n+2} \\ &\quad - (u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{2n-1}u_{2n}) = (-1)^{2n}u_{2n+1} + (-1)^{2n+1}u_{2n+2} = u_{2n+1} - u_{2n+2} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 \end{aligned}$$

Donc la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= z_{2n+1} - z_{2n-1} \\ &= u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{2n-2}u_{2n-1} + (-1)^{2n-1}u_{2n} + (-1)^{2n}u_{2n+1} \\ &\quad - (u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{2n-2}u_{2n-1}) = (-1)^{2n-1}u_{2n} + (-1)^{2n}u_{2n+1} = -u_{2n} + u_{2n+1} \\ &= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = -\frac{1}{2n(2n+1)} < 0 \end{aligned}$$

Donc la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est décroissante

$$\begin{aligned} y_n - x_n &= z_{2n-1} - z_{2n} \\ &= u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{2n-2}u_{2n-1} - (u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{2n-1}u_{2n-1} + (-1)^{2n-1}u_{2n}) \\ &= -(-1)^{2n-1}u_{2n} = u_{2n} = \frac{1}{2n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Par conséquent les suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

- Les suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite, comme z_n ne prends que les valeurs de x_n ou de y_n , z_n converge vers cette limite.

Partie II.

4.

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n &= z_{2n+2} - z_{2n} \\
&= u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{2n-1}u_{2n} + (-1)^{2n}u_{2n+1} + (-1)^{2n+1}u_{2n+2} \\
&\quad - (u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{2n-1}u_{2n}) = (-1)^{2n}u_{2n+1} + (-1)^{2n+1}u_{2n+2} \\
&= u_{2n+1} - u_{2n+2} > 0
\end{aligned}$$

Car la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante, la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= z_{2n+1} - z_{2n-1} \\
&= u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{2n-2}u_{2n-1} + (-1)^{2n-1}u_{2n} + (-1)^{2n}u_{2n+1} \\
&\quad - (u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{2n-2}u_{2n-1}) = (-1)^{2n-1}u_{2n} + (-1)^{2n}u_{2n+1} \\
&= -u_{2n} + u_{2n+1} < 0
\end{aligned}$$

Car la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante, la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

$$\begin{aligned}
y_n - x_n &= z_{2n-1} - z_{2n} \\
&= u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{2n-2}u_{2n-1} \\
&\quad - (u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{2n-1}u_{2n-1} + (-1)^{2n-1}u_{2n}) = -(-1)^{2n-1}u_{2n} = u_{2n} > 0
\end{aligned}$$

Ces deux suites sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite.