Université Lyon 1 | Licence STS Portail M. Math-Info 1ière année
UE Analyse I : Les réels et les fonctions | Année 2013-2014

Contrôle continu final
Le 8 Janvier 2014. Durée 2 heures

Documents et appareils électroniques interdits.

Exercice 1. (10,8 p) Soit

$f:\mathbb{R}\to A$, donné par : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{1+|x|}=\begin{cases}\frac{x}{1+x}, & si\ \ x\geq 0\\ \frac{x}{1-x}, & si\ \ x<0\end{cases}$

Ici A est l'image de f (que l'on déterminera au cours de l'exercice).

1. (1,8 p) Montrer que f est dérivable.
2. (1,2 p) Montrer que la dérivée f' de f est continue.
3. (0,5 p)Montrer que f' n'est pas dérivable.
4. (0,6 p) Déterminer le tableau de variation de f.
5. $*$ (1,8 p) Tracer le graphe de f. Au passage, étudier l'existence des asymptotes au graphe, et la position du graphe par rapport aux asymptotes
6. (1,2 p)Déterminer l'image A de la fonction f.
7. (0,6p) Montrer que $f:\mathbb{R}\to A$ admet une fonction réciproque, que l'on note $h: A\to\mathbb{R}$.
8. Trouver h.
9. $*$ (1,8 p) Notons g la restriction de f à $]0,+\infty[$, trouver la formule de $g^{(n)}$ (la dérivée n-ième de g) pour $n\geq 1$. On justifiera la réponse.

Exercice 2. (6p)

On considère l'équation différentielle suivante :

(1) $y'=-\frac{y}{x}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, avec $x>0$.

1. (1,8 p calcul+1,2 p vérification) Montrer que

(2) $y_0:]0,+\infty[\to\mathbb{R}, y_0(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}, x>0,$

Est solution de (3).

2. (1,8 p équation homogène+1,2 p sol. générale) Trouver toutes les solutions de (3).
3. (0,6 p) Donner la solution de (3) vérifiant $y(1)=\sqrt{2}-1$
4. (1,8 p) écrire ce qu'il faut faire, (calcul, limite, justification) Montrer que la fonction y de la question précédente se prolonge par continuité à droite en 0.

Exercice 3. (6,6 p)

1. (1,2 p) Soit $x>0$. Montrer qu'il existe un $c=c(x)\in\,]0,x[$ tel que :

(3) $e^x-1=xe^c$

Le but de cet exercice est de préciser la position de c par rapport au milieu $\frac{x}{2}$ de l'intervalle $]0,x[$. Pour ce faire, nous introduisons la fonction :

$f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$, donnée par $f(x)=e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}-x$

2. (1,2 p variation, signe) Dresser le tableau de variation de la dérivée f' de f. Quel est le signe de f' sur $]0,+\infty[$?
3. (1,8 p variation, valeur limite à l'infini) Utiliser la question précédente pour dresser le tableau de variation de f.
4. (0,6 p) En déduire l'inégalité

$$f(x) > 0, \forall x > 0$$

5. (0,6 p) En déduire que

$$e^x - 1 > xe^{\frac{x}{2}}$$

6. (1,2 p) Enfin, obtenir que $c(x) \in \left]\frac{x}{2}, x\right[$.

Exercice 4. (6,6 p)

Partie I. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$, soit

(4)

$$z_n = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^n u_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} u_j$$

On pose aussi

(5) $x_n = z_{2n}$ et $y_n = z_{2n-1}$, $\forall n \geq 1$

1. (1,2 p) Donner les valeurs de $z_1, z_2, z_3, z_4, x_1, x_2, y_1$ et y_2
2. (1,8 p monotonie (x_n), monotonie (y_n), $y_n - x_n \to 0$) Montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
3. (1,2 p) En déduire que la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ converge.

Partie II. Dans cette partie, nous considérons une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ décroissante et qui converge vers 0. (Attention, il ne s'agit pas forcément de la suite donnée par $u_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$).

Nous définissons les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ par les formules (4) et (5)

4. $*$ (1,8 p monotonie (x_n), monotonie (y_n), $y_n - x_n \to 0$, recollement) Montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. Conclusion ?